泛函分析中的反例

汪林 编

高等教育出版社

(京)112号

泛函分析中的反例

汪 林 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张15.625 字数390 000

1994年3月第1版 1994年3月第1次印刷

印数 0001—2 235

ISBN7-04-004258-4/O·1219

定价 8.30 元

出版前言

本书汇集了泛函分析中的大量反例，主要内容有度量空间，赋范线性空间，线性算子，弱拓扑和弱*拓扑，向量值函数，不动点理论，Hilbert 空间，线性算子的谱．对 Banach 空间的同构理论，基，凸性和范数可微性方面的反例也作了介绍。本书可供高等学校数学系学生，研究生，教师参考。

序　言

在数学的教学和研究中，经常要从正面肯定某个命题成立，或从反面否定某个命题不成立，这也是揭示任何自然规律的两个主要手段．而绝大多数的数学书籍，主要致力于证明在某些条件下某一结论是真，很少谈到在另一些条件下某一结论是真还是错误的，即用来说明某些命题不真的反例则较少，这不利于学习的深入．因此，比较系统地汇集某个数学分支的反例，以弥补这方面的不足，无疑是十分有益的．然而，目前国内还没有一本泛函分析反例方面的专门著作，也未见到国外的．本书就是填补这一空白的尝试．

本书所指的反例，其含义比较广泛．例如，“点列的强、弱收敛性等价的无限维赋范线性空间”，就是关于“无限维赋范线性空间中点列的强、弱收敛性必定不等价”这一命题不成立的一个例子．总之，本书是通过具体的例子来说明某个命题不成立的事实．

为了适合不同程度的读者的需要，本书编入了不同难易程度的各种反例．因而，即便是刚学完一般泛函分析教程的读者，也能从书中有所得益；而某些较难的例子，甚至对专家来说，也不失其参考价值．

本书的取材，主要是从各种有关的书籍以及散见在各种数学杂志上的反例中挑选出来的．阅读本书所需的预备知识，假定读者已经掌握．因此，书中只准备了很少的说明．每一章都以引言开始，用来明确与本书有关的泛函分析方面的记号、术语和定义，也陈述了一些有关的定理，这些定理或者是构造某些反例时要用到，或者是为了衬托某个反例．各章的引言中未介绍实分析方面的记号、术语、定义以及有关定理，有关这方面的内容，读者可参看作者

撰写的《实分析中的反例》(高等教育出版社 1989 年出版)一书.此外，书中还提出了一系列尚待解决的问题，可供读者进一步探讨.

中国科学院学部委员，业师程民德教授仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而又十分宝贵的意见；A. C. Thompson 教授①给作者以很大的鼓励，并提供了一些例子；云南大学卫念祖教授始终关怀本书的编写；杨富春、杨华康、丁彦恒、郑喜印、谷照升、李小娥等同志阅读了本书的部分手稿，并提出了许多有益的建议；本书的责任编辑仔细地审读了书稿全文，对本书各个部分作了核对，并且提出了许多宝贵的意见，为提高本书的质量作了大量工作.

对上面提到的所有的人，作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限，因而一定存在不少缺点，殷切期望专家和读者予以批评指教.

汪　林

初稿 1986 年元月

定稿 1990 年 10 月于云南大学

① A.C.Thompson 系加拿大数学教授. 1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学，并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

目　　录

第二章　赋范线性空间

第六章 自反空间和弱紧生成空间 ………… 179

第十三章　线性算子的谱 ………………………………… 375

第一章 度量空间

引言

我们先介绍拓扑空间和度量空间的一些基本概念和性质.

设X是任意非空集,τ是X的一个子集族,它满足(i)X及空集$\varnothing$属于τ;(ii)τ中任意两个元素之交仍属于τ;(iii)τ中任意个元素之并仍属于τ,此时我们称τ是X上的一个拓扑,并称X为具有拓扑τ的拓扑空间.我们也常用(X,τ)表示集X上定义了拓扑τ的拓扑空间.此外,拓扑τ中的元素称为开集,而其余集称为闭集.

设τ_1和τ_2是X上的两个拓扑.若$\tau_1\subset\tau_2$,则说τ_1弱于τ_2,或者说τ_2强于τ_1.X上最弱的拓扑由两个子集X与$\varnothing$组成,称为平庸拓扑;X上最强的拓扑由X的一切子集组成,称为离散拓扑.

设x是拓扑空间X中任一点,$V\subset X$.若有开集G使得$x\in G\subset V$,则称V为x的一个邻域.设$\mathscr{A}$是由x的某些邻域构成的集族.若对x的任一邻域V,存在$A\in\mathscr{A}$,使$x\in A\subset V$,则$\mathscr{A}$称为x的一个邻域基底.若拓扑空间X中任一点皆有一个可数邻域基底,则X称为满足第一可数公理.

设A是拓扑空间(X,τ)的子集.如果存在点$x\in A$的邻域V,使V不含有A的异于x的点,即$V\cap A=\{x\}$,则称x为集A的孤立点.如在x的任意邻域中都含有集A的异于x的点,则称x为集A的聚点或极限点.如果存在点x的含于集A中的邻域V,则点x称为集A的内点.如果在点x的任意邻域中既含有A的点,也含有不属于A的点,则x称为集A的边界点.A的内点的集称为A的内部,并用 int A 或$\mathring{A}$表示.集A的闭包$\bar{A}$是包含A的所有闭集的交集.任一集A的闭包$\bar{A}$都是闭集.集A为闭集当且仅当它等于自己的闭包$A=\bar{A}$.

如果 $B\subset\overline{A}$，则说集 A 在 B 中是稠密的；如果 $\overline{A}=X$，就说 A 处处稠密，简称 A 稠密。如果在拓扑空间 (X,τ) 中存在可数或有限的稠密集，就称为可分的。

如果 $\operatorname{int}\overline{A}=\varnothing$，则集 A 称为无处稠密集或疏集。在一个拓扑空间中，凡能表为至多可数个疏集之并的集称为第一纲集。不是第一纲的集称为第二纲集。

拓扑空间 (X,τ) 的点列 $\{x_n\}$ 称为收敛的，是指存在点 $x\in X$，使得对于它的任意邻域 V，存在正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时，$x_n\in V$。这时，点 x 称为点列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n \text{ 或 } x_n\to x.$$

拓扑空间 (X,τ) 称为分离的或 Hausdorff 的，是指对于任意两个不同的点 $x,\ y\in X$，都存在 x 和 y 的不相交的邻域。在 Hausdorff 拓扑空间中，收敛点列只有一个极限。

设 (X,τ) 是拓扑空间，若 X 可表为两个不相交的非空开集之并，则称 X 为不连通的；而当这种表示不可能时，就称 X 为连通的。

若 X 上的集族 $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 满足 $X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$，则称 $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的一个覆盖。特别，若每个 G_λ 都是开集，则称 $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的一个开覆盖。

设 A 是拓扑空间 X 的子集。如果 A 的每个开覆盖都有有限子覆盖，则称 A 为紧的。

设 (X,τ_X) 与 (Y,τ_Y) 都是拓扑空间，f 是 X 到 Y 的映射。若 $x_0\in X$，且对 $f(x_0)$ 的任一邻域 U，都存在点 x_0 的邻域 V，使 $f(V)\subset U$，则我们说映射 f 在点 x_0 处连续。如果 f 在 X 的每一点处都连续，就说 f 是连续映射。当且仅当 Y 中的每个开集的原象都是 X 中的开集时，映射 f 是连续的。

设 (X,τ_X) 与 (Y,τ_Y) 都是拓扑空间，f 是由 $D(f)\subset(X,\tau_X)$ 到

$R(f)\subset(Y,\tau_Y)$上的一对一的映射，其中$D(f)$和$R(f)$分别代表f的定义域和值域，则f的逆映射(记作f^{-1})是由等式$f^{-1}[f(x)]=x$确定的$R(f)$到X的映射. 如果f是由(X,τ_X)到(Y,τ_Y)上的一对一的映射，而且f及其逆映射f^{-1}都是连续的，则称f是同胚映射或拓扑映射. 如果在拓扑空间(X,τ_X)与(Y,τ_Y)之间存在着同胚映射，那么称这两个空间是同胚的.

设(X,τ)是拓扑空间，$A\subset X$. 形如$\{A\cap U:U\in\tau\}$的子集族组成A上由拓扑τ诱导出的拓扑τ_A. 称(A,τ_A)为拓扑空间(X,τ)的子空间.

设X为一非空集，若对X中任何两个点x和y有一个实数$d(x,y)$与之对应，满足(i)$d(x,y)\geqslant 0$，而且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$；(ii)$d(x,y)=d(y,x)$；(iii)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$(三角不等式)，这里$z\in X$，则称$d$为$X$上的一个距离，而称$(X,d)$为距离空间或度量空间.

n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$是度量空间. 设$A\subset\mathbf{R}^n$，若在A上取欧氏距离：

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x=\{x_i\}_{i=1}^n,\quad y=\{y_i\}_{i=1}^n\in A,$$

则称d是A上的通常距离.

设(X,d)是度量空间，$x_0\in X$，r为正实数，集

$$B(x_0,r)=\{x:x\in X,d(x_0,x)<r\}$$

称为以x_0为球心、r为半径的开球或x_0的r邻域.

$$B[x_0,r]=\{x:x\in X,d(x_0,x)\leqslant r\}$$

称为以x_0为球心、r为半径的闭球.

$$S(x_0,r)=\{x:x\in X,d(x_0,r)=r\}$$

称为以x_0为球心、r为半径的球面.

设 A 为度量空间 X 的子集，数 $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$ 称为点 x 到集 A 的距离；数 $d(A,B)=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x,y)$ 称为度量空间 (X,d) 中集 A 与 B 间的距离；数 $\operatorname{diam} A=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$ 称为 A 的直径.

设 A 为度量空间 (X,d) 的子集. 若对任意 $x\in A$，有 $r_x>0$，使 $B(x,r_x)\subset A$，则称 A 为开集. 令 τ_d 为 X 中所有开集构成的集族，则 τ_d 为 X 上的一个拓扑. 我们称 τ_d 为 X 上的由距离 d 诱导出来的拓扑. 并且约定，在称一度量空间 (X,d) 为拓扑空间时，指的即是拓扑空间 (X,τ_d). 于是，点列 $\{x_n\}$ 在拓扑空间 (X,τ_d) 中收敛于 x，当且仅当 $d(x_n,x)\to 0$.

若对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_0，当 $m,n>n_0$ 时 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}\subset(X,d)$ 为Cauchy点列. 若度量空间 (X,d) 中的任意 Cauchy 点列都收敛，则称它为完备的.

设 f 是度量空间 (X,d_X) 到 (Y,d_Y) 内的映射. 若对任何 x_1，$x_2\in X$，都有

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))=d_X(x_1,x_2),$$

则称 f 为等距映射. 两个度量空间 X 与 Y，若存在从 X 到 Y 上的等距映射，则称 X 与 Y 是等距的.

设 A 为度量空间 (X,d_X) 的子集，对 $x,y\in A$，令 $d_A(x,y)=d_X(x,y)$，则 (A,d_A) 亦为度量空间，称它为 (X,d_X) 的子空间.

设 (X,d_X) 是一个度量空间. 若有完备度量空间 (Y,d_Y)，使 X 和 Y 的一个稠密子空间等距，则称 Y 为 X 的完备化空间. 对于任何度量空间，都存在完备化空间，而且任何两个完备化空间都等距.

度量空间中的集 A，如其含于某一球中，则称 A 为有界的. 若空间 (X,d) 是有界的，则称 d 为有界距离. 集 $S\subset X$ 称为度量空间 (X,d) 的集 A 的 ε 网，是指对于任意 $x\in A$，存在 $y\in S$，使 $d(x,y)<\varepsilon$. 若对任意 $\varepsilon>0$，存在集 A 的有限 ε 网，则称 A 为

全有界的.

度量空间 X 的子集 A 称为列紧的或相对序列紧的，是指 A 中每个点列都有一子列收敛于 X 中的一个点. 度量空间中的列紧闭集称为自列紧的或序列紧的. 度量空间中的集 A 是紧的，当且仅当它是自列紧的.

映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为在点 $x_0\in X$ 是连续的，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $d_X(x,x_0)<\delta$ 时，就有 $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. 这个定义与把 f 看成由拓扑空间 (X,τ_{d_X}) 到 (Y,τ_{d_Y}) 的映射的连续性的定义等价. 映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为一致连续的，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得由不等式 $d_X(x',x'')<\delta$ 可以推出 $d_Y(f(x'),f(x''))<\varepsilon$.

有关拓扑空间和度量空间的更多的材料，以及所列陈述的证明，可参看[8]，[14]和[18].

1. 实直线 $\mathbf{R}^1$ 上存在距离 d 和点列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset(\mathbf{R}^1,d)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

下面的例子是由 Rothmann[271] 作出的. 对 $x,y\in\mathbf{R}^1$，令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ \max\{|x|,|y|\}, & x\neq y,\end{cases}$$

易见，d 是 $\mathbf{R}^1$ 上的一个距离. 取 $x_n=1,y_n=-\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

因对任一正整数 n，$d(1-\dfrac{1}{n},1)=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)\neq1,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)\neq\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

注 上述反例表明，在度量空间中两个点列的和（如果加法运算有意义）的极限未必等于极限之和.

2. 存在 $\mathbf{R}^2$ 的一个测度为零的度量子空间，它的某个稠密开集的

边界为不可数集。

设C为$[0,1]$中的 Cantor 三分集，在$X=C\times C$上取通常距离，则X的 Lebesgue 测度为零．令

$$A=\{(a,b):(a,b)\in C\times C,b\neq 0\},$$

则A是X的稠密的开子集．因A的边界是$C\times\{0\}$，故它是一个不可数集．

这个例子是由 James[143]作出的．

3．存在一个集上的两个距离d_1与d_2，不存在距离d使$d\leqslant d_1$，$d\leqslant d_2$．

如所周知，任意非空集X上的任意两个距离d_1与d_2，恒有X上的距离d_3，使对一切$x,y\in X$，都有$d_3(x,y)\geqslant d_1(x,y)$，$d_3(x,y)\geqslant d_2(x,y)$．事实上，我们只要取$d_3=d_1+d_2$即可．那么是否必有$X$上的距离$d$，使对一切$x,y\in X$，都有

$$d(x,y)\leqslant d_1(x,y),d(x,y)\leqslant d_2(x,y).$$

这个问题的答案是否定的，例如，设$X=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$，并在$X$上取通常距离$d_1(x,y)=|x-y|$，$x,y\in X$．令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x=1,\\ x, & 0<x<1,\end{cases}$$

$d_2(x,y)=d_1(f(x),f(y))$，则当$0<x<1$时，有

$$d_1(x,0)=|x|=x,$$

$$d_2(x,1)=d_1(f(x),f(1))=d_1(x,0)=x.$$

兹证不存在距离d，使对一切$x,y\in X$有$d(x,y)\leqslant d_1(x,y)$，$d(x,y)\leqslant d_2(x,y)$．反设具有上述性质的距离d，那么对任意$x(0<x<1)$，应有

$$d(x,0)\leqslant d_1(x,0)=x,$$

$$d(x,1)\leqslant d_2(x,1)=x.$$

由此得到

$$d(0,1)\leqslant d(0,x)+d(x,1)\leqslant 2x.$$

上式右端可以任意小，而左端为一正常数，这是不可能的.

4. 存在两个不相交的有界闭集，它们之间的距离等于零.

设 $X=(0,1)\cup(1,2)$，在 X 上取通常距离 $d(x,y)=|x-y|$，$x,y\in X$，则 X 为一度量空间. 易见，$(0,1)$ 与 $(1,2)$ 是 X 中的两个不相交的有界闭集，然而它们之间的距离等于零.

注 容易证明，度量空间中任何两个不相交的非空闭集，只要其中有一个是紧的，那么它们之间就有正值距离. 上述反例之所以成为可能，是由于所论的两个闭集都不是紧的.

5. 存在一个完备度量空间中的紧集 F_1 与闭集 F_2，使对任意 $x\in F_1, y\in F_2$ 恒有 $d(x,y)>d(F_1,F_2)$.

容易证明，若 F_1 与 F_2 都是度量空间中的紧集，则必定存在 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$ 而有 $d(x_0,y_0)=d(F_1,F_2)$. 应当注意，当 F_1 与 F_2 不全为紧集时，这个命题的结论不再成立，反例如下：

设 l^2 是满足条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<+\infty$ 的数列 $x=\{\xi_n\}$ 的全体. 对 $x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\}\in l^2$，令

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 l^2 为一完备的度量空间. 在 l^2 中取 $F_1=\{0\}$，$F_2=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中

$$0=(0,0,\cdots),$$

$$x_n=\left(0,\cdots,0,\frac{n+1}{n},0,\cdots\right).$$

易见，F_1 是紧集. 又对任意 $x_m, x_n\in F_2$，$m\neq n$，有

$$d(x_m,x_n)=\sqrt{\frac{(m+1)^2}{m^2}+\frac{(n+1)^2}{n^2}}>\sqrt{2}.$$

因此，F_2 是一个闭集. 但对任意 $x\in F_1, y\in F_2$，按 F_1 与 F_2 的

定义，$x=0$，$y=x_n$（对某个 n），因而

$$d(x,y)=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}>1=d(F_1,F_2),$$

即不存在 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$而有 $d(x_0,y_0)=d(F_1,F_2)$.

注 l^2是 Hilbert 空间的原型，它是由 Hilbert[137]于 1912 年在积分方程研究中引进并加以研究的，而 Hilbert 空间公理化的定义他并未给出，直到 1927 年，Neumann[231]才给了出来．当时定义中包含可分性条件．这个条件从定义中去掉是Löwig[212]，Rellich[257]与 Riesz[262]的工作，他们证明了对绝大部分理论．这个条件是不必要的限制．

8．$C[0,1]$上的两种距离，使得按照一种距离的单位球的余集在另一种距离下的单位球内是稠密的．

我们用$C[0,1]$代表定义在闭区间$[0,1]$上的实值连续函数全体．设 ρ 和 d 是如下的两种距离：对 x，$y\in C[0,1]$，令

$$\rho(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\|x-y\|_2,$$

$$d(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|=\|x-y\|_\infty.$$

设$U=\{x:\rho(x,0)\leqslant 1\}$，$V=\{x:d(x,0)\leqslant 1\}$分别为两种距离下的单位球．显然，$V\subset U$．兹证$V$的余集$V^c$在$U$内稠密．为此，任取 $x\in U$，$0<\varepsilon<1$．如果$\|x\|_\infty>1$，那么 $x\notin V$，我们就不用再去管它了．如果$\|x\|_\infty\leqslant 1$，就令

$$y(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^2}{9}\text{或}\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon^2}{9}\leqslant t\leqslant 1,\\ 3, & t=\frac{1}{2},\\ \text{线性，其它，} & \end{cases}$$

则 $y\in C[0,1]$且 $x+y\notin V$，而

$$\|x-(x+y)\|_2=\|y\|_2<\sqrt{9\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right)}=\varepsilon.$$

因此，V^c 在 U 内是稠密的.

7. 一个度量空间，其中存在开球，它是闭集但不是闭球；又存在闭球，它是开集但不是开球.

设 $X=\{x=(\xi,\eta):-\frac{1}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2},\eta=0\}\cup\{(0,1)\}\cup\{(0,-1)\}$，并在 X 上取通常距离，则 $\{x=(\xi,\eta):x\in X,\ d(x,0)<1\}$ 是 X 中的开球，它是闭集但不是闭球. 又 $\{x=(\xi,\eta):x\in X,\ d(x,0)\leqslant\frac{1}{2}\}$ 是 X 中的闭球，它是开集但不是开球.

注　上述反例说明了在某些度量空间中，虽然开球与闭球的球心和半径都相同，但是，开球的闭包未必是一个闭球.

在任何赋范线性空间中都不可能作出这种例子.

8. 存在度量空间，其中开球的闭包都是闭球，但它的某个子空间却无此性质.

下面的例子是由 Nathanson[239] 作出的

易见，$\mathbf{R}^1$ 中每个开球的闭包都是闭球. 取 $\mathbf{R}^1$ 的度量子空间 $X=[0,1]\cup[2,3]$，则 X 中开球 $\{x\in X:d(1,x)<1\}$ 的闭包是 $[0,1]$；而 $\{x\in X:d(1,x)\leqslant1\}=[0,1]\cup\{2\}$，故开球 $\{x\in X:d(1,x)<1\}$ 的闭包不是闭球.

9. 存在某个度量空间的紧子空间 E，使 E 中每个球都是连通的，但是开球的闭包未必是闭球.

对 $p=(x_1,y_1)$，$q=(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$，令

$$d(p,q)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|),$$

则 $(\mathbf{R}^2,d)$ 为一度量空间. 设 E 是 $(\mathbf{R}^2,d)$ 中适合下述条件的点 (x,y) 组成的子空间：或者 $x=0$ 而 $0\leqslant y\leqslant1$，或者 $y=0$ 而 $0\leqslant x\leqslant1$. 易见，E 是 $(\mathbf{R}^2,d)$ 的紧子空间，且 E 中每个球都是

连通的．我们考虑E中的开球

$$B((1,0),1)=\{(x,y):0<x\leqslant 1,y=0\},$$

其闭包显然是$\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,y=0\}$，而闭球$B[(1,0),1]=E$，故二者并不相等．

10．存在某个度量空间，在其中有半径分别为r_1与r_2的闭球B_1与B_2，虽然$r_1>r_2$，却有$B_1\subset B_2$。

设X是由$\mathbf{R}^2$中的闭圆盘上所有的点组成：$X=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 9\}$，并在$X$上取通常距离．再设$B_2=X$，以及

$$B_1=\{(x,y):(x,y)\in X,\ d((2,0),(x,y))\leqslant 4\}$$
$$=B_2\cap\{(x,y):(x-2)^2+y^2\leqslant 16\}.$$

于是$B_1\subset B_2$，然而$r_1=4>3=r_2$．

注　上述例子表明在度量空间中半径为4的球可能是半径为3的球的真子集．在上述例子中B_1的半径$r_1=4$，而直径则等于6．在任何赋范线性空间中，由于每个球的半径都是它的直径的一半，因而作不出这种例子．

11．存在度量空间，在其中有集A，使$\{p:d(p,A)\leqslant 1\}\neq\bigcup_{q\in A}B[q,1]$，这里$B[q,1]=\{p:d(q,p)\leqslant 1\}$.

设$X=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 9\}$，在$X$上取通常距离，并令

$$A=X\cap\{(x,y):(x-2)^2+y^2<16\}.$$

于是$\{p=(x,y):d(p,A)\leqslant 1\}=X$，因而$(-3,0)\in\{p:d(p,A)\leqslant 1\}$.

另一方面，任取$q=(x,y)\in A$，则$d((-3,0),(x,y))>1$，因而$(-3,0)\notin B[q,1]$．因$q\in A$是任取的，故$(-3,0)\notin\bigcup_{q\in A}B[q,1]$，从而$\{p:d(p,A)\leqslant 1\}\neq\bigcup_{q\in A}B[q,1]$.

注　容易证明，对任意度量空间中的任意集A，恒有$\bigcup_{q\in A}B[q,r]\subset\{p:d(p,A)\leqslant r\}$．上述反例表明这个包含关系一般说来是严格的．

12．存在完备度量空间，在其中一个渐缩的非空闭球列$\{B_n\}$，

使$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$.

设 X 为一切正整数所成之集，对 $m, n \in X$，令

$$d(m, n)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{m+n}, & m \neq n, \\ 0, & m=n. \end{cases}$$

易见，d 是 X 上的一个距离．任取 X 中的 Cauchy 点列$\{x_n\}$，按距离 d 的定义，存在正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时所有的 x_n 均相同，从而$\{x_n\}$为一收敛点列．因此，度量空间 X 是完备的．

设 $B_n=\{m: d(n, m) \leqslant 1+\frac{1}{2n}\}=\{n, n+1, \cdots\}$．易见，各个 B_n 都是非空闭球，且是渐缩的，即 $B_{n+1} \subset B_n, n=1, 2, \cdots$，然而$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\varnothing$.

注　我们有如下的命题：设 X 是不空的完备度量空间．若 $B_n=\{x: d(x_n, x) \leqslant \varepsilon_n\}$是 X 中渐缩的闭球列，且 $\varepsilon_n \rightarrow 0$，则必有唯一的点 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$(参看[18]，p.67)．上述反例说明了在这个命题中球的半径 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 不能去掉．

但是，如果完备度量空间是 Banach 空间，且 $B_n=\{x: d(x_n, x) \leqslant \varepsilon_n\}$ 是其中的渐缩的非空闭球列，那么即使 $\varepsilon_n \nrightarrow 0$，也有$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$(参看[11]，p.34)．

13．存在某个集上的两个距离，使得到的两个度量空间一个完备而另一个不完备．

设 X 为区间$[0,1]$上的一切连续函数所成之集，在 X 上分别取距离

$$d(x, y)=\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}|x(t)-y(t)|,$$

$$d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt.$$

不难证明，(X,d) 为完备的度量空间，这个空间通常记作 $C[0,1]$. 为了证明 (X,d_1) 不完备，我们在 $[0,1]$ 上定义如下的函数：

$$x_n(t)=\begin{cases}n, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{n^2},\\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & \dfrac{1}{n^2}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

对每一 n，x_n 显然都是 $[0,1]$ 上的连续函数，从而 $x_n\in(X,d_1)$. 又当 $m<n$ 时，

$$\begin{aligned}d_1(x_n,x_m)&=\int_0^1|x_n(t)-x_m(t)|dt\\&=\int_0^{\frac{1}{n^2}}|x_n(t)-x_m(t)|dt\\&\quad+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}}|x_n(t)-x_m(t)|dt\\&\quad+\int_{\frac{1}{m^2}}^{1}|x_n(t)-x_m(t)|dt\\&=\frac{n-m}{n^2}+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-m\right)dt\\&=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\to 0\ (m,n\to\infty),\end{aligned}$$

可见 $\{x_n\}$ 是 (X,d_1) 中的 Cauchy 序列. 但 $\{x_n\}$ 在 (X,d_1) 中并不收敛. 为证明这一陈述，我们只要证明对任何 $x\in(X,d_1)$，$d_1(x_n,x)$ 都不可能趋于零即可. 令

$$M=\max\{1,\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\},$$

并设 $n\geqslant 2M$. 于是当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{M^2}$ 时，$x_n(t)\geqslant x(t)$，因而

$$|x_n(t)-x(t)|=x_n(t)-x(t)\geqslant x_n(t)-M.$$

由此可知当$n\geqslant 2M$时，有

$$d_1(x_n,x)\geqslant\int_0^{\frac{1}{M^2}}[x_n(t)-M]dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n^2}}[x_n(t)-M]dt+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}}[x_n(t)-M]dt$$

$$=\frac{n-M}{n^2}+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-M\right)dt$$

$$=\frac{1}{M}-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2M}.$$

因M为一正常数，故$\{x_n\}$在(X,d_1)中并不收敛于x，即(X,d_1)不完备.

注 同一个集上可取不同的距离而形成不同的度量空间. 上述反例说明了这些空间有些可能是完备的，有些则不然.

14. 任何子集都是既开又闭的完备度量空间.

设X为一非空集合，在X上取距离：

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

任取 Cauchy 点列$\{x_n\}\subset X$，则当n充分大后各个x_n均相同，故$\{x_n\}$是X中的收敛点列. 即X是完备的.

任取$x\in X$，因以x为球心$\frac{1}{2}$为半径的开球只含有点x，故X中每一单元素集皆为开集. 于是由开集的性质以及开集与闭集的关系可知，X中的每个子集都是既开又闭的.

15. 任何子集都是既开又闭的不完备的度量空间.

设X为一切正整数所成之集，令$d(m,n)=\frac{|m-n|}{mn}$，则(X,d)为一度量空间．因$\{n\}_{n=1}^{\infty}$是(X,d)中的一个 Cauchy 序列，而它并不收敛，故(X,d)不完备．

兹证X中的任何子集都是既开又闭的，为此，只要证明X中任一单元素集$\{n\}$都是开集即可．若$m>n$，则

$$f(m)=d(m,n)=\frac{(m-n)}{mn}$$

是关于m的递增函数，因而

$$d(m,n)\geqslant\frac{1}{n(n+1)}\quad(m>n).\tag{1}$$

若$0<m<n$，则

$$f(m)=d(m,n)=\frac{(n-m)}{mn}$$

是关于m的递减函数，因而

$$d(m,n)\geqslant\frac{1}{n(n-1)}\quad(n>m>0).\tag{2}$$

由(1)，(2)可知对任何正整数$m(m\neq n)$，都有$d(m,n)\geqslant\frac{1}{n(n+1)}$.

取$r=\frac{1}{n(n+1)}$，则以n为球心r为半径的开球就是单点集$\{n\}$，故$\{n\}$是开集．

注 这种情况在欧氏空间中不可能出现．对于欧氏空间而言，其中既开且闭的集只有空间本身及空集而已．

如果度量空间中的单点集都是开集，则称此度量空间为离散度量空间．例 14 与例 15 表明离散度量空间可能是完备的，也可能是不完备的．

16．内点都是孤立点的度量空间．

任何一个离散度量空间都具有所需的性质．

17. 同一个集 X 上的两个距离 d_1 与 d_2，使 (X, d_1) 可分而 (X, d_2) 不可分.

设 X 是一切有界数列 $x=\{\xi_n\}$ 所成之集. 对 $x=\{\xi_n\}$, $y=\{\eta_n\}\in X$，令

$$d_1(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}.$$

易证，d_1 满足距离公理，从而 (X,d_1) 为一度量空间. 设 M 是形如 $(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)$ 的元素 x 的集，其中 r_i 为任意有理数，n 为任意正整数. 显然，M 为一可数集，且 M 在 (X,d_1) 中稠密，从而 (X,d_1) 可分.

对于上述集合 X，令 $d_2(x,y)=\sup\limits_n|\xi_n-\eta_n|$. 易见，$d_2$ 也满足距离公理，从而 (X,d_2) 也为一度量空间. 这个空间叫做有界数列空间，并记作 l^∞ 或 m.

考虑 l^∞ 中其坐标仅取 0 和 1 的元素的集合. 易知，它们不同者相互距离为 1，且这个集合不可数. 因此，该集不可分，从而 l^∞ 亦不可分.

注 同一个集上可以赋予不同的距离而形成不同的度量空间. 上述反例表明这些空间有些可能是可分的，有些则不然.

18. 无理数集上存在非离散的完备距离，使其成为完备的可分空间.

如所周知，在无理数集上取通常距离后，它是一个不完备的可分空间. 于是便产生问题：在无理数集上是否存在非离散的完备距离，使其成为完备的可分空间？我们指出，这个问题的答案是肯定的.

设 $\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{Q}=\{r_i\}$. 对 $x, y\in\mathbf{R}^1\setminus\mathbf{Q}$，令

$$d(x,y)=|x-y|+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}$$

$$\times \inf\left\{1, \left| \max_{i \le i} \frac{1}{|x - r_i|} - \max_{i \le i} \frac{1}{|y - r_i|} \right| \right\},$$

则 d 是 $R^1 \backslash Q$ 上的一个距离，且 $(R^1 \backslash Q, d)$ 显然不是离散空间.

任取数列 $\{x_n\} \subset (R^1 \backslash Q, d)$，如果它依 $R^1 \backslash Q$ 上的通常距离收敛于某个有理数 r_k，则对每一 x_n，存在 $x_m, m > n$，使

$$d(x_n, x_m) \geq |x_n - x_m| + 2^{-k},$$

故 $\{x_n\}$ 不可能是度量空间 $(R^1 \backslash Q, d)$ 中的 Cauchy 点列. 因此，$(R^1 \backslash Q, d)$ 是完备的.

形如 $\pi + q(q \in Q)$ 的无理数的全体在 $(R^1 \backslash Q, d)$ 中显然是稠密的，故 $(R^1 \backslash Q, d)$ 是可分的.

19. 有界而非全有界的集合.

在空间 l^2 中取点列 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots), n = 1, 2, \cdots$. 因 $d(e_n, 0) = 1$，故 $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 中的有界集. 但是，对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 而言，M 不存在有限 ε 网，故 M 不是全有界的.

注 全有界集必定是有界的. 上述反例表明这个陈述之逆并不成立.

20. 全有界而不列紧的集合.

设 X 为区间 $[0, 1]$ 中的有理数全体，在 X 上取通常距离，则 X 为一不完备的度量空间.

对任意 $\varepsilon > 0$，取正整数 n 使 $n\varepsilon > 1$，则集 $\left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ 就是 X 的一个有限 ε 网，故 X 是全有界的. 然而 X 并不列紧，因为若取 $x_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in X, n = 1, 2, \cdots$，则 $\{x_n\}$ 中不存在收敛于 X 中某个元素的子列.

注 因为有 Hausdorff 定理：在完备度量空间内列紧性与全有界性是等价的(参看[14], pp. 29—30)，故在任何完备度量空间

内就不可能作出这种例子.

容易证明,如果度量空间X的每个全有界集都是列紧集,那么X必是完备的. 因此,在任何一个不完备的度量空间内,都存在全有界而不列紧的集合.

21. 有界闭集并不都是列紧的度量空间.

设B是空间l^2中的单位球:$B=\{x:d(0,x)\leqslant 1\}$,则$B$是$l^2$中的一个有界闭集. 取$B$中的点$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, $n=1,2,\cdots$,因$d(e_n, e_m)=\sqrt{2}\ (n\neq m)$,故$B$不列紧.

注 其实可以证明,每个无穷维赋范线性空间中的单位闭球都是不列紧的有界闭集. 此外,还容易证明度量空间中的自列紧集必为有界闭集. 上述反例表明这个命题之逆并不成立.

应当注意,赋范线性空间为有限维的充要条件是它的任一有界子集都是列紧的(参看[14],p. 69),故在任何有限维赋范线性空间内不可能作出这种例子.

22. 一个列紧集列,其并集并不列紧.

$\mathbf{R}^1$中每个子集$[n,n+1]$都是列紧的,但其并集$\bigcup_{n=0}^{\infty}[n,n+1]=[0,+\infty)$并不列紧.

注 容易证明,有限个列紧集的并集仍是列紧的. 上述反例表明不能把这个命题推广到无穷多个集合的情形.

23. 存在某个度量空间中的列紧集,它与它的某个真子集等距.

在$\mathbf{R}^2$中取极坐标系,并考虑子集

$A=\{(\rho,\theta):\rho=1,\theta=0,1,2,\cdots\}$. 于是,$\rho=1,\theta$为无理数的点$(\rho,\theta)$均为$A$的聚点,且$A$是列紧的. 令

$B=\{(\rho,\theta):\rho=1,\theta=1,2,\cdots\}$,则$B$是$A$的真子集,且$A$与$B$等距.

注 可以证明,任何度量空间中的自列紧集都不能与其真子

集等距．上述反例表明在这个命题中自列紧集的条件不可减弱为列紧集．

24．存在某个非紧度量空间，它不能与它的真子集等距．

如所周知，紧度量空间不能与其真子集等距．于是自然要问：这是否为紧度量空间的特征．这个问题的答案是否定的，Fox[107]有例如下：

设N为正整数集，令

$$X=N\bigcup\left\{n-\frac{1}{n+1}:n\in N\right\},$$

在X上取通常距离，则度量空间X不是紧的．由于X到其自身的等距映射是恒等映射，因而X不能与其真子集等距．

25．存在非紧的度量空间，在它上面的每个实值连续函数都是一致连续的．

我们知道，紧度量空间上的每个实值连续函数都是有界的，并且是一致连续的．于是便产生问题：

1．若度量空间上的每个实值连续函数都是有界的，则此度量空间是否必为紧的？

2．若度量空间上的每个实值连续函数都是一致连续的，则此度量空间是否必为紧的？

Hewitt[136]肯定地回答了第一个问题．他证明了为使度量空间X是紧的，当且仅当X上每个实值连续函数都是有界的．

容易证明，对于欧氏空间中的子集A，第二个问题的答案也是肯定的，即A为紧集的充要条件是A上的每个实值连续函数都是一致连续的．然而，对于一般的度量空间，尽管在它上面的每个实值连续函数都是一致连续的，但该空间仍然不必是紧的．例如，在实数集X上取距离．

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\0, & x=y.\end{cases}$$

显然，度量空间(X,d)上的每个实值函数都是连续的，而且还是一致连续的. 但是，(X,d)不是紧的.

Hermann[135]于1981年指出，为使度量空间X是紧的，当且仅当下述两个条件成立：

a. X上的每个实值连续函数都是一致连续的.

b. 对任意$\varepsilon>0$，$\{x\in X:d(x)>\varepsilon\}$是有限集，其中$d(x)$代表点$x$到集$X\setminus\{x\}$的距离，即

$$d(x)=\inf\{d(x,y):y\in X\setminus\{x\}\}.$$

26. 存在两个度量空间 X 与 Y，使 X^2 与 Y^2 等距而 X 与 Y 并不等距.

若X与Y都是度量空间，则乘积空间X^2与Y^2也可借助于X与Y上的距离而引入距离. 例如，在X^2上可取距离.

$$d((x_1,x_2),(x_3,x_4))=[d^2(x_1,x_3)+d^2(x_2,x_4)]^{\frac{1}{2}}$$

Ulam[317]提出下述问题：若度量空间X^2与Y^2等距，能否推出X与Y亦等距？

Fournier[106]指出，这个问题的答案是否定的. 他的例子如下：

设$\mathbf{Q}$是有理数集，$X=\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}^1$，$Y=\{p\sqrt{2}:p\in\mathbf{Q}\}\subset\mathbf{R}^1$. 可以证明，$X$与$Y$作为$\mathbf{R}^1$的度量子空间，它们并不等距. 事实上，如果$X$与$Y$等距，并设$f$是$X$到$Y$上的等距映射，那么应有

$$\begin{aligned}1&=d(0,1)=d(f(0),f(1))\\&=d(p\sqrt{2},q\sqrt{2})=\sqrt{2}\,|p-q|.\end{aligned}$$

于是得到$\sqrt{2}=|p-q|^{-1}\in\mathbf{Q}$，矛盾.

兹证X^2与Y^2等距. 为此，我们把X^2，Y^2作为$\mathbf{R}^2$的度量子空间，并研究映射$\theta:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，这里

$$\theta(x,y)=((x-y)\sqrt{2}/2,(x+y)\sqrt{2}/2).$$

显然，θ是$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$上的一个等距映射. 今任取$(p,q)\in X^2$，则

$(p-q)/2$ 与 $(p+q)/2$ 都是有理数，故

$\theta(p,q)=((p-q)\sqrt{2}/2,(p+q)\sqrt{2}/2)\in Y^2$，即 $\theta(X^2)\subset Y^2$．另一方面，对任意 $(p\sqrt{2},\ q\sqrt{2})\in Y^2$，$(p\sqrt{2},\ q\sqrt{2})$ 是 $(p+q,q-p)\in X^2$ 的象，故 $\theta(X^2)\supset Y^2$．因此，$\theta(X^2)=Y^2$．于是，如果令 g 是 θ 在 X^2 上的限制，那么，$g:X^2\to Y^2$ 是一个等距满射，这里 $(p,q)\in X^2$，$g(p,q)=\theta(p,q)$．因此，X^2 与 Y^2 是等距的．

注 在 Fournier 的例子中，X 与 Y 都是不完备的度量空间．于是自然产生问题：若 X 与 Y 均为完备度量空间，则 Ulam 问题的答案应该怎样？

27．一个不完备的度量空间，它同胚于它的完备化空间．

下面的例子是由 Arens[31] 作出的．

设 X 是平面集：$X=\{(x,y):x=0,1,2,\cdots;y=0,1,\frac{1}{2},\cdots\}$，

在 X 上取通常距离．令 $X_0=X\backslash\{(0,0)\}$，则 X 是 X_0 的完备化空间．设

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)=\left(m-1,\frac{1}{n+1}\right),m>0,$$

$$f(m,0)=(m-1,0),f\left(0,\frac{1}{n}\right)=(n-1,1),$$

则 f 显然是 X_0 到 X 上的同胚映射．

注 这个例子也说明了两个同胚的度量空间，其中一个可能完备而另一个可能不完备．

28．存在两个不同胚的度量空间，每一个都是另一个的一对一的连续象．

设 $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}[(3n,3n+1)\cup\{3n+2\}]$，$Y=(X\backslash\{2\})\cup\{1\}$，在 X 与 Y 上都取通常距离，即 $d(x,y)=|x-y|$．设 X 到 Y 上的映射 f 及 Y 到 X 上的映射 g 分别为

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 2, \\ 1, & x=2, \end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{y}{2}, & y\leqslant 1, \\ \dfrac{y}{2}-1, & 3<y<4, \\ y-3, & y\geqslant 5, \end{cases}$$

则 f 和 g 都是连续的、一对一的满映射．然而，X 与 Y 不是同胚的，因为考虑 Y 到 X 上的任何同胚映射时，Y 中的点 1 都无法有与之相当的点．

此例表明由一个度量空间到另一个度量空间上的连续的、一对一的满映射不必是同胚映射，即逆映射不必是连续的．

注 Cater[64]构造了两个无理数子集 A 与 B，使 $A\cup B$ 是全体无理数，且对 $\mathbf{R}^1$ 中的任意非空开区间 I 与 J，$A\cap I$ 与 $B\cap J$ 在通常距离下不同胚，但存在 $A\cap I$ 到 $B\cap J$ 上的连续的、一对一的满映射．

29．某个度量空间中的子集 A 与 B，虽然 A 与 B 的某个子集同胚，B 与 A 的某个子集同胚，但 A 与 B 仍不同胚．

在 $\mathbf{R}^1$ 中取子集 $A=(0,1)$，$B=[0,1]$，则 A 与 B 的子集 $(0,1)$ 同胚，其同胚映射为 $y=x$；B 与 A 的子集 $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$ 同胚，其同胚映射为 $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$．然而 A 与 B 并不同胚．

注 这个例子表明，关于判断两个集的势相等的 Bernstein 定理，不能用作判断两个集是否同胚的工具．

30．$\mathbf{R}^1$ 中存在两个同胚的子集 A 与 B，而不存在 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 上的同胚映射 f，使 $f(A)=B$．

令 $A=\{0\}\cup[1,2]\cup\{3\}$，$B=[0,1]\cup\{2\}\cup\{3\}$，则 A 与 B 是 $\mathbf{R}^1$ 中的两个同胚的子集，但不存在 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 上的同胚映射 f，使

$f(A)=B$.

注 上述反例表明，若 A 与 B 是 $\mathbf{R}^1$ 中的子集，f 是 A 到 B 上的同胚映射，则 f 未必能扩张成为 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 上的同胚映射.

31．把 Cauchy 点列映成非 Cauchy 点列的同胚映射.

设 $X=(-1,1)$，并在 X 上取通常距离. 令

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}, & -1<x<0,\\[2mm] \dfrac{x}{1-x}, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

则 f 是一个由 X 到 $\mathbf{R}^1$ 上的连续的、一对一的满射，其逆映射为

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{1-y}, & -\infty<y<0,\\[2mm] \dfrac{y}{1+y}, & 0\leqslant y<+\infty.\end{cases}$$

显然，它也是连续的. 因此，f 是 X 到 $\mathbf{R}^1$ 上的同胚映射.

现取 $x_n=1-\dfrac{1}{n}\in X$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 点列. 因为 $y_n=f(x_n)=n-1$, 故 $\{y_n\}$ 不是 $\mathbf{R}^1$ 中的 Cauchy 点列.

注 可以证明，若两个度量空间都是完备的，则同胚映射把 Cauchy 点列映成 Cauchy 点列. 上述反例表明在这个命题中两个度量空间都为完备的条件不可去掉.

32．Cauchy 点列的几种弱形式之间的关系.

古典的 Cauchy 定理给出了数列收敛的充要条件：

I 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$，使当 $n,n'\geqslant n(\varepsilon)$ 时就有

$$|a_n-a_{n'}|<\varepsilon.$$

II 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$，当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时，对任意 $m\in N$（N 为正整数集），都有

$$|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon.$$

III 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$n(\varepsilon)$，使对一切$m\in N$，都有

$$|a_{n(\varepsilon)+m}-a_{n(\varepsilon)}|<\varepsilon.$$

我们自然要问：当N代以它的真子集时，这些条件是否还是充分的？为回答这一问题，我们设$P\subset N$，$s=\{a_n\}$是数列，并引入下列概念：

定义 1 数列s称为在类$\mathscr{M}(P)$中，是指对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$n(\varepsilon)$，当$n\geqslant n(\varepsilon)$且$p\in P$时，有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

定义 2 数列s称为在类$\mathscr{N}(P)$中，是指对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$n(\varepsilon)$，当$p\in P$时，就有

$$|a_{n(\varepsilon)+p}-a_{n(\varepsilon)}|<\varepsilon.$$

定义 3 数列s称为在类$\mathscr{K}(P)$中，是指对任意$\varepsilon>0$及$m\in N$，存在正整数$n(\varepsilon,m)\geqslant m$，当$p\in P$时，就有

$$|a_{n(\varepsilon,m)+p}-a_{n(\varepsilon,m)}|<\varepsilon.$$

我们用C代表一切收敛数列所成之集，则 I 即为$C=\{\text{Cauchy 数列}\}$；II 即为$C=\mathscr{M}(N)$；III 即为$C=\mathscr{N}(N)$.

Neculce[23]证明了$C\subset\mathscr{M}(P)\subset\mathscr{K}(P)\subset\mathscr{N}(P)$，但它们并不相等，从而否定地回答了上面提出的问题.

第一例 存在集P使$\mathscr{M}(P)\neq C$.

令$P=\{p:p=2k,k\in N\}$，则在$\mathscr{M}(P)$中存在发散数列．事实上，取$s=\{a_n\}$，其中$a_n=0,n=2m$；$a_n=1,n=2m-1,m\in N$．显然，$s\in\mathscr{M}(P)$，且s发散.

第二例 存在集P使$\mathscr{M}(P)\neq\mathscr{K}(P)$.

考虑数列$s=\{a_n\}$，其中$a_n=0,n=4k-2$；$a_n=1$，$n=2k-1$或$n=4k,k\in N$．对每个$m\in N$，我们取$n(\varepsilon,m)=4k'\geqslant m$，则

$$|a_{4k'+2k-1}-a_{4k'}|=0,$$

故 $s\in\mathscr{K}(P)$，这里 $P=\{p:p=2k-1,\ k\in N\}$. 然而，$s\notin\mathscr{M}(P)$.

第三例 存在集 P 使 $\mathscr{K}(P)\neq\mathscr{N}(P)$.

考虑数列 $s=\{a_n\}$，其中 $a_n=0$，$n=1$ 或 $n=2k$；$a_n=1$，$n=2k-1$，$k\in N$. 易见，对任意 $\varepsilon>0$，我们取 $n(\varepsilon)=1$，则当 $p\in P$ 时，就有

$$|a_{n(\varepsilon)+p}-a_{n(\varepsilon)}|=0,$$

故 $s\in\mathscr{N}(P)$，这里 $P=\{p:p=2k-1,k\in N\}$. 然而，$s\notin\mathscr{K}(P)$，因为对 $m>1$，若取 $n(\varepsilon,m)=2k'>m$，则有

$$|a_{2k'+2k-1}-a_{2k'}|=1.$$

若取 $n(\varepsilon,m)=2k'+1>m$，则有

$$|a_{2k'+1+2k-1}-a_{2k'+1}|=1.$$

33. 把全有界集映成非全有界集的同胚映射.

设 $X=(-1,1)$，并在 X 上取通常距离. 又设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$-1<x<0$；$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，$0\leqslant x<1$，则 f 是 X 到 $\mathbf{R}^1$ 上的同胚映射(参看例 31). 显然，X 全有界而 $\mathbf{R}^1$ 则否.

34. 把列紧集映成非列紧集的同胚映射.

$\mathbf{R}^1$ 中的子集 $(0,+\infty)$ 不列紧，它是 $\mathbf{R}^1$ 中列紧子集 $(0,1)$ 的同胚象，同胚映射为 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$.

注 若 X 与 Y 均为度量空间，f 是 X 到 Y 的连续映射，则 f 必然把 X 中的列紧集映成 Y 中的列紧集. 上述反例说明了如果 f 的定义域不是整个空间 X，那么 f 不必把列紧集映成列紧集.

35. 把闭集映成非闭集的同胚映射.

$\mathbf{R}^1$ 中的开区间 $(-1,1)$(不是闭集)是 $\mathbf{R}^1$(闭集)的同胚象，同胚映射为 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$-1<x<0$；$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，$0\leqslant x<1$.

26．一个连续映射，它把某个有界闭集映成非闭集．

在$X=[0,1)$上取通常距离，则X为一不完备的度量空间．令$F=\left[\frac{1}{2},1\right)$，易见，$F$是$X$中的有界闭集．设$f$是把$X$映到同长的圆周上的映射：$f(x)=x, 0\leqslant x<1$，则$f$为一连续映射．但$f$把有界闭集$F$映成非闭集．

注 可以证明，若f是从一个欧氏空间到另一个欧氏空间的连续映射，则f把有界闭集（这是一个紧集——有限维赋范线性空间中的有界闭集必为紧集）映成有界闭集．一般地，若f是从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续映射，则f把紧集映成紧集．上述例子中的有界闭集F不是紧的，故不能保证其连续象是紧的．

27．一个开集的等距象，它不是开集．

对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$．显然，$l^2$与它的子集$T(l^2)$是等距的．

兹证$T(l^2)$在l^2中是无处稠密的，从而T映开集l^2为l^2中的非开集$T(l^2)$．

任给$\varepsilon>0$并任取$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$，设$a\neq 0$为一实数使$\eta_1<a<\eta_1+\frac{\varepsilon}{2}$，令$z=(a,\eta_2,\eta_3,\cdots)$，则$d(z,y)=a-\eta_1<\frac{\varepsilon}{2}$．令$r=\min\left\{|a|,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，因$d(z,y)<\frac{\varepsilon}{2}$，故

$$B(z,r)\subset B\left(z,\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset B(y,\varepsilon).$$

假定$x=\{\xi_n\}\in B(z,r)$，则$d(x,z)<r$，因而$|\xi_1-a|<r$．由于$|a|\geqslant r$，可见$\xi_1\neq 0$，从而$x\notin T(l^2)$．因此，

$$B(z,r)\cap T(l^2)=\varnothing.$$

这就说明l^2中的每个开球$B(y,\varepsilon)$包含一个与$T(l^2)$不相交的开

球 $B(z,r)$，即 $T(l^2)$ 是 l^2 中的无处稠密集.

注 上述例子中的映射 T 不是满射. 若 T 是满射，则作不出这种例子.

38. 连续而不列紧的映射.

设 X, Y 是度量空间，由 X 到 Y 的映射 f 叫做列紧的，是指 f 把 X 中的每个有界集映成 Y 中的列紧集.

连续映射不必是列紧的. 例如，取 $X=(0,1), Y=(1,+\infty)$，并在 X, Y 上取通常距离. 令 $f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in X$，则 f 是 X 到 Y 上的连续映射，但 f 并不列紧.

39. 映每个子集为列紧集的无处连续映射.

设 $X=Y=\mathbf{R}^1$，$f(x)=1$，x 为有理数；$f(x)=0$，x 为无理数. 则 f 映 X 中的每个子集为 Y 中至多仅有两个点之集. 因此，f 是一个列紧映射，但 f 是无处连续的.

40. 存在由 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的某个子集上的一对一的连续映射 g，使对任意 $p\in\mathbf{R}^2$ 都有 $d(p,g(p))=1$，而 g 不是 $\mathbf{R}^2$ 到该子集上的等距映射.

我们有下述问题：如果 g 是 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的某个子集上的一对一的连续映射，使对任意 $p\in\mathbf{R}^2$ 均有 $d(p,g(p))=1$，那么 g 是否必为 $\mathbf{R}^2$ 到该子集上的一个等距映射？

Leland 与 Meyers[169] 指出，这个问题的答案是否定的.

设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上严格递增的连续函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}^1$ 均有 $|f(x)|\leqslant 1$. 例如，可取 $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$. 对每一 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$，令

$$g(x,y)=(x+f(x),\ y+(1-f^2(x))^{\frac{1}{2}}).$$

映射 g 显然是连续的. 又因为 f 是严格递增的，所以对任意的 $(x_0,y_0)\in g(\mathbf{R}^2)$，存在唯一的 $(x_1,y_1)\in\mathbf{R}^2$，使

$$x_0=x_1+f(x_1),y_0=y_1+(1-f^2(x_1))^{\frac{1}{2}}.$$

也就是说，g 是由 $\mathbf{R}^2$ 到 $g(\mathbf{R}^2)$上的一对一的连续映射，且对任意 $p=(x,y)\in\mathbf{R}^2$，都有 $d(p,g(p))=1$. 然而 g 不是等距映射，这是因为

$$d(g(0,0),g(1,0))>1+f(1)>1$$
$$=d((0,0),(1,0)).$$

41．一个完备的凸度量空间(X,d)，使 X 到 X 的一切连续映射所成的度量空间 F 不是凸的，其中 F 上的距离为 $e(f,g)=\sup\limits_{p\in X} d(f(p),g(p))$.

度量空间(X,d)叫做凸的，是指对每一对不同的点 $p,q\in X$，存在不同于 p,q 的点 $r\in X$，使得

$$d(p,q)=d(p,r)+d(r,q).$$

凸度量空间的概念是由 Menger[220] 引进的．他还证明了若 X是完备的凸度量空间，则对任意 $p,q\in X$，$p\neq q$，存在X的含有点 p,q 的子集，该子集等距于长度为 $d(p,q)$的某个区间．如果这个子集是唯一确定的，那么就称(X,d)是强凸的．可以证明，若X是具有有界距离 d 的强凸度量空间，那么 F 必为凸度量空间.

Naimpally[227]提出下述问题：在刚才提到的命题中，度量空间X为强凸的条件是不是本质的？Mavinkurve[216] 指出，若凸度量空间X并不强凸，则度量空间F不必是凸的．他的例子如下：

设X是平面上的单位圆周，对 $p,q\in X$，令 $d(p,q)$ 为这个单位圆周上两点 p 与 q 之间较小的一个弧的长度．易见，(X,d)是完备的凸度量空间．但并不强凸，因为若 p 与 q 为单位圆周上的直径的两个端点，则X的含有点 p,q 的子集就不唯一确定的了.

兹证度量空间F不是凸的．为此，设 f 是圆周上到单点集 $\{a\}\subset X$ 的常值映射，g 是这样的连续映射，它取圆周上每一点为关于直径的相反的点．于是，$e(f,g)=\pi$．假如F是凸的，那么应当存在连续映射 h，使

$$e(f,h)=\alpha, e(h,g)=\pi-\alpha,$$

其中 $0<\alpha<\pi$. 由 $e(f,h)=\alpha$ 可知，在映射 h 之下，h 的象包含于一个以 a 为中心长为 2α 的闭弧内. h 在这个象上的限制，可作为实轴上的闭区间到自身的连续映射，因而有不动点 $p_0\in X$，使 $h(p_0)=p_0$. 于是据映射 g 的定义，应有 $e(h,g)=\pi$，从而

$$e(f,h)+e(h,g)=\pi+\alpha,$$

此为矛盾. 因此，F 不是凸的.

第二章　赋范线性空间

引言

本书中所说的线性空间，除特别声明外，都是指复数域或实数域上的线性空间，并且我们假定读者已经熟悉了关于线性空间，线性子空间(简称子空间)，线性相关和线性无关，线性组合或线性表示等定义及性质．此外，我们还要引进一些定义和记号．

设X，Y是同一数域K上的线性空间．算子$T: X\to Y$称为线性的，是指对任意$x,y\in X$及数$\alpha,\beta\in K$，有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

线性算子$T: X\to K$称为线性泛函．子空间

$$\ker T=T^{-1}\{0\}=\{x: Tx=0\}$$

称为线性算子$T: X\to Y$的核或T的零空间．

设X，Y都是线性空间，若存在一个从X到Y上的一对一的线性算子，则称X与Y代数同构，简称同构．

设X是线性空间，称$\{h_\alpha\}\subset X$是X中的一个Hamel基，是指X中任一元素均可用$\{h_\alpha\}$中的有限个元素的线性组合来唯一表出．于是，对任意$x\in X$，x可表为

$$x=\sum_\alpha t_\alpha h_\alpha,$$

这里，和式是有限项的，且表示法是唯一的．

可以证明，任何线性空间都存在Hamel基，而且同一个线性空间内的任意两个Hamel基都是一一对应的(参看[326]，p.17)．因此，同一个线性空间内的任意两个Hamel基的势是相同的．据此命题，我们可以引进线性维数(亦称Hamel维数)的概念．所谓线性空间X的线性维数(Hamel维数)，是指X中的Hamel基的势，记作$\dim X$．仅由零元素组成的线性空间称为零维线性空间．

设 X 为一线性空间，如果对于所有满足 $\lambda+\mu=1$ 的 $\lambda\geqslant 0$，$\mu\geqslant 0$，有 $\lambda A+\mu A\subset A$（对于所有的 $|\lambda|\leqslant 1$，有 $\lambda A\subset A$），则集 $A\subset X$ 称为凸（均衡）的．包含 A 的最小凸（均衡）集称为 X 的集 A 的凸包（均衡包）．如果存在 $\alpha>0$，使得对于所有满足 $|\lambda|\geqslant\alpha$ 的 λ，有 $\lambda A\supset B$，则称线性空间 X 中的集 A 吸收集 B．如果 X 中的集 A 吸收 X 的每个点，则称它为吸收的．

设 A 为线性空间 X 的非空凸子集，$x\in A$，如果当点 $y,z\in A$，$0<\lambda<1$，$x=\lambda y+(1-\lambda)z$ 时，有 $x=y=z$，则称 x 为 A 的一个端点．A 的端点全体记为 $\mathrm{ext}A$．

设 X 为线性空间，如对任意 $x\in X$，有一确定的实数 $\|x\|$ 与它对应，并满足 (i) $\|x\|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时 $\|x\|=0$；(ii) 对任意 $x\in X$ 及数 λ，$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$；(iii) 对任意 $x,y\in X$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，则称 X 为赋范线性空间，$\|x\|$ 称为 x 的范数．

设 X 是赋范线性空间．我们称 X 中的点列 $\{x_n\}$ 依范数收敛或强收敛于 $x\in X$，是指

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\underset{\text{强}}{=}x$ 或 $x_n\xrightarrow{\text{强}}x\ (n\to\infty)$，有时简记为 $x_n\to x$．

任何赋范线性空间都是距离为 $d(x,y)=\|x-y\|$ 的度量空间．完备的赋范线性空间称为 Banach 空间．

若 M 是线性空间 X 的子集，则在 X 中存在包含 M 的线性子空间，称它是 M 所张成的子空间或集 M 的线性包，记作 $\mathrm{span}M$．显然，$\mathrm{span}M$ 就是 M 中的一切有限个元素的线性组合所构成的 X 的线性子空间．M 所张成的闭线性子空间记作 $\overline{\mathrm{span}}M$．

设 X 为一线性空间，$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数．若存在正数 m,M，使不等式

$$m\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1$$

对一切 $x\in X$ 成立，则称范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|\cdot\|_2$ 等价．容易看出，两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价，当且仅当它们在 X 上定义了同一个

拓扑，于是，两个范数的强、弱性以及不可比较性等概念是不言而喻的。

设X，Y都是赋范线性空间，T是定义在X的子空间E上而值域包含在Y中的线性算子. 若存在正数M，使对一切$x\in E$，都有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,$$

则称T是有界的. 若T不是有界的，就称它是无界的. 使$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$对一切$x\in E$都成立的正数M的下确界，称为T的范数，记作$\|T\|$. 显然有

(i) 对一切$x\in E$，有$\|Tx\|\leqslant\|T\|\ \|x\|$；

(ii) $\|T\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in E}}\|Tx\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in E}}\|Tx\|=\sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

容易证明，线性算子T有界的充要条件是T将定义域内的任一有界集映成Y中的有界集；T的有界性等价于T的连续性.

设X，Y都是赋范线性空间，我们用$L(X,Y)$代表由X到Y的所有有界线性算子所成之集，在$L(X,Y)$中定义加法和数乘运算如下：

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x\,(T_1,T_2\in L(X,Y),x\in X);$$

$$(\alpha T)x=\alpha Tx\,(T\in L(X,Y),\alpha\text{ 为数}),$$

则$L(X,Y)$按上述线性运算是一个线性空间. 对$T\in L(X,Y)$，令

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|,$$

则$L(X,Y)$成为一个赋范线性空间，我们称$L(X,Y)$为线性算子空间. 若Y是一个 Banach 空间，则$L(X,Y)$也是一个 Banach 空间. 如$X=Y$，则记$L(X,Y)$为$L(X)$. 如Y为数域K，则称$L(X,K)$是X的共轭空间，记作X^*，它是一个 Banach 空间. 类似地，可定义X^*的共轭空间X^{**}，称它为X的二次共轭空间. 还可定义X^{***}，等等.

存在唯一由赋范线性空间X到X^{**}内的等距映射$\varphi: X\ni x\to F\in X^{**}$，其中对于所有的$f\in X^*$，都有$F(f)=f(x)$. 如果这个

等距映射(称为典则映射)是一个满射,则称X为自反的,而且通过φ把X跟X^{**}等同起来,常写$X=X^{**}$.

设M是赋范线性空间X的一个闭线性子空间,X/M是X的关于M的商空间.对每个元$[x]\in X/M$,我们定义

$$\|[x]\|=\inf_{y\in[x]}\|y\|,$$

那么$\|[x]\|$是X/M上的一个范数.如果X是一个Banach空间;那么商空间X/M也是一个Banach空间.

最后,我们列出一批Banach空间的例子如下:

1. $l^p(1\leqslant p<+\infty)$:所有使$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<+\infty$的数列$x=\{\xi_n\}$所成的线性空间.

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. l^∞:有界数列$x=\{\xi_n\}$,$\|x\|=\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|$.

3. c:由l^∞中的所有收敛数列组成的线性子空间.

4. c_0:由c中所有收敛于0的数列组成的线性子空间.

5. $C(\Omega)$:Hausdorff空间Ω上所有取值于数域K的有界连续函数$x(t)$所成的线性空间,$\|x\|=\sup_{t\in\Omega}|x(t)|$.

在下述的例6和例7中,Ω是抽象集合,$\mathscr{R}$是Ω的子集的σ环,而μ是定义在$\mathscr{R}$上的σ有限测度(参看[18]).

6. $L^p(\Omega,\mathscr{R},\mu)(1\leqslant p<+\infty)$:测度空间$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$上的使得$\int_\Omega|x(\sigma)|^p d\mu<+\infty$的可测函数$x$的等价类之集,

$$\|x\|=\left(\int_\Omega|x(\sigma)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

7. $L^\infty(\Omega,\mathscr{R},\mu)$:取值于数域$K$的所有本性有界的可测函数$x$的等价类之集,

$$\|x\|=\operatorname{vrai\ max}|x(\sigma)|.$$

8. Hilbert空间H:这是数域K上的一个线性空间,它具有定义在$H\times H$上而取值于K中的内积$\langle x,y\rangle$,适合:$\langle x,y\rangle=$

$\overline{\langle y,x\rangle}$，$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$，$\langle x,x\rangle\geqslant 0$．$\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$．范数定义为 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$，$H$ 按此范数成为一个赋范线性空间，而且是完备的．

9． $C^m[a,b]$：所有取值于数域 K 且在 $[a,b]$ 上具有 m 阶连续导数的集合，

$$\|x\|=\sum_{i=0}^{m}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(i)}(t)|.$$

1．存在某个线性空间中的两个线性子空间，其并不是线性子空间．

容易证明，线性空间中两个线性子空间的交必是线性子空间．然而，两个线性子空间的并未必是线性子空间．例如，设 X 是定义在区间[0,1]上的一切实值函数所成的线性空间．令

$$M=\left\{x(t):x\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\},$$

$$N=\left\{y(t):y\left(\frac{1}{3}\right)=0\right\},$$

则 M 和 N 都是 X 的线性子空间．但当 $x\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$y\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ 时，函数 $z(t)=x(t)+y(t)\notin M\cup N$，故 $M\cup N$ 不是 X 的线性子空间．

2．存在某个线性空间的子集 A，使 $A+A\neq 2A$．

容易证明，对任何线性空间的子集 A 和数 α，β，恒有 $(\alpha+\beta)A\subset\alpha A+\beta A$．一般说来，这个包含关系是严格的．例如，在 $\mathbf{R}^2$ 中，令

$$X=\{(x,0):x\in\mathbf{R}^1\},$$

$$Y=\{(0,y):y\in\mathbf{R}^1\},$$

$A=X\cup Y$，则 $A+A=\mathbf{R}^2$，而 $2A=A$，故 $A+A\neq 2A$．

3．存在某个线性空间中的非凸集 A，适合 $A+A=2A$．

容易证明，若A是凸集，则必有$A+A=2A$。然而等式$A+A=2A$并不蕴涵A是凸集．例如，设

$$A=\{(x,y):(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2\leqslant 1\}\setminus\{(x,y):(x,y)\in\mathbf{R}^2, 0<x\leqslant 1, y=0\}.$$

易见，$A+A=2A$，但A不是凸集．

4．存在某个线性空间中的非凸集A和线性映射T，使$T(A)$是凸集．

容易证明，在线性映射下，凸集的象仍是凸集．然而一个集在某线性映射下的象集是凸集，这个集不必是凸集．例如，对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l$，令$Tx=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$，则$T$是一个由$l$到$l$的线性映射．设

$$A=\{(0,\xi_1,\xi_2,\cdots):\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\leqslant 1\}\cup\{(2,0,0,\cdots)\},$$

则A为l中的一个非凸子集，而

$$T(A)=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots):\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\leqslant 1\},$$ 它是l中的一个凸集．

5．存在n维欧氏空间中不同胚的闭凸集．

容易证明，n维欧氏空间中的任意两个开凸集必定同胚．然而两个闭凸集未必同胚．例如，单点集为闭凸集，但它不与n维欧氏空间中的单位闭球同胚．

6．$\mathbf{R}^2$中的一个吸收集，它在复平面内并不吸收．

设B_1与B_2是平面上的分别以$(1,0)$与$(-1,0)$为中心的单位闭圆盘，C是以$(0,-1)$与$(0,1)$为端点的闭直线段．令$A=B_1\cup B_2\cup C$，则A作为实空间$\mathbf{R}^2$的子集，它显然是一个吸收集．但作为复平面的子集，它不再是吸收集了，这是因为对于无论多么小的正数r，A不能包含以r为半径，中心在原点的圆盘．

7．$\mathbf{R}^2$中的一个均衡集，它在复平面内并不均衡．

设A是平面内以$(0,0)$为中心且四边分别平行于坐标轴的长

方形(非正方形)，则 A 作为实空间 $\mathbf{R}^2$的子集，它是均衡的，即对于任意实数 $t(|t|\leqslant 1)$都有 $tA\subset A$. 但 A 作为复平面的子集，它就不再是均衡的了，这是因为 iA 并不包含于 A 中.

注 其实，复平面$\mathbf{C}$中的均衡集是：$\mathbf{C}$，空集 $\varnothing$ 和每个以 0 为中心的圆盘(开的或闭的)，而 $\mathbf{R}^2$中则有更多的均衡集：任何一个中点在原点的线段都是. 其原因是：尽管 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{R}^2$等同，但从它们的线性结构方面考虑，二者是完全不同的.

8. 存在某个线性空间中的集，它的均衡包的凸包不等于它的凸包的均衡包.

在线性空间中，一个集的均衡包的凸包不必等于它的凸包的均衡包. 例如，设

$$S=\{(x,y):(x,y)\in\mathbf{R}^2, x+y=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\},$$

则 S 是凸集，故 S 的凸包就是它本身，而 S 的均衡包为

$$\{(x,y):x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0 \text{ 或 } x+y\geqslant -1, x\leqslant 0, y\leqslant 0\}.$$

显然，它不是凸集. 另一方面，由于 S 的均衡包的凸包一定是凸集，故二者并不相等.

9. 任给线性空间 X，可在 X 上赋予范数而使之成为赋范线性空间.

设$\{h_\alpha\}$是线性空间X中的一个Hamel基. 于是，对任意$x\in X$，x可唯一表为

$$x=\sum_\alpha t_\alpha h_\alpha.$$

这里，和式是有限项的. 令$\|x\|=\max\limits_\alpha|t_\alpha|$，则容易验证，$\|x\|$满足范数公理，从而$(X,\|\cdot\|)$为一赋范线性空间.

10. 存在某个线性空间上的两个不可比较的完备范数.

可以证明，Banach空间c_0与l^2具有相同的线性维数，因而存在由c_0到l^2上的一对一的线性映射f(参看[236]，p.20). 借助于这个线性映射，我们可以在c_0上取下述新范数：

$$\|x\| = \|f(x)\|_{l^2}, (x \in c_0).$$

容易验证，$(c_0, \|\cdot\|)$仍为Banach空间.

兹证c_0上的原范数$\|x\|_{c_0}$与新范数$\|x\|$不可比较. 反设它们可以比较，那么由Banach 逆算子定理可知（参看[14]，pp. 121—122），原范数与新范数必须是等价的，即存在正常数m，M，使对一切$x \in c_0$，都有

$$m\|x\|_{c_0} \leqslant \|f(x)\|_{l^2} \leqslant M\|x\|_{c_0}.$$

由此可知，f是c_0到l^2上的一个线性同胚映射. 于是，Banach空间c_0与l^2或者都是自反的，或者都不是自反的(参看[236]，p.105)，这显然是不正确的.

11. 存在某个线性空间上的强、弱两个范数，使强范数完备而弱范数不完备.

在线性空间l上取范数$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$，$\|x\| = \sup_n |\xi_n|$，其中$x = \{\xi_n\} \in l$，则赋范线性空间$(l, \|\cdot\|_1)$完备而$(l, \|\cdot\|)$不完备，且

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|x\|_1.$$

对每一正整数n，令$x_n = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n, 0, 0, \cdots)$，则$\|x_n\|_1 = 1$，$n = 1, 2, \cdots$，而$\|x_n\| = 1/n \longrightarrow 0 (n \to \infty)$，故范数$\|\cdot\|_1$严格强于范数$\|\cdot\|$.

12. 存在某个线性空间上的强、弱两个范数，使弱范数完备而强范数不完备.

在线性空间c_0上取两个不等价的完备范数$\|x\|_{c_0}$及$\|x\|$（参看例10）. 令

$$|||x||| = \|x\|_{c_0} + \|x\|,$$

则$|||\cdot|||$显然也是线性空间c_0上的一个范数，而且它既强于$\|\cdot\|_{c_0}$又强于$\|\cdot\|$.

兹证范数$\|\cdot\|$不完备，即赋范线性空间$(c_0,\|\cdot\|)$不完备，反设$\|\cdot\|$完备，那么由Banach逆算子定理可知范数$\|\cdot\|$既与$\|\cdot\|_{c_0}$等价，又与$\|\cdot\|$等价，从而$\|\cdot\|_{c_0}$与$\|\cdot\|$等价，此为矛盾.

13. 不能赋予完备范数的线性空间.

对于任意线性空间，总可以在它上面赋予范数而使之成为一个赋范线性空间(参看例9). 我们自然要问：对于任意线性空间，是否必能赋予完备范数而使之成为一个Banach空间. 这个问题的答案是否定的. 例如，我们用E^∞代表只有有限个非零坐标的实数列$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$的全体，并定义通常的加法与数乘运算，则$E^\infty$成为一个线性空间.

兹证不能在E^∞上赋予完备范数. 反设能在E^∞上赋予完备范数$\|\cdot\|$，即$(E^\infty,\|\cdot\|)$为一Banach空间，那么它应当是一个第二纲的集(参看[18]，pp.68—69). 另一方面，令$e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则$\{e_n\}_{n=1}^\infty$所张成的线性空间就是$E^\infty$，而由$\{e_1,\cdots,e_n\}$所张成的线性子空间$E_n=\text{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$乃是$(E^\infty,\|\cdot\|)$的闭的真子空间，且

$$E^\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

不难证明，各个E_n在$(E^\infty,\|\cdot\|)$内都是无处稠密的，即$(\overline{E}_n)^\circ=\mathring{E}_n=\varnothing$. 反设存在某个$n_0$而有$\mathring{E}_{n_0}\neq\varnothing$，那么可取$x_0\in\mathring{E}_{n_0}$以及$x_0$的某个开球$B(x_0,r)=\{x:\|x_0-x\|<r\}$，使

$$B(x_0,r)\subset\mathring{E}_{n_0}\subset E_{n_0}.$$

任取$x\in E^\infty$，显然存在实数$\beta>0$，使$\beta x-x_0\in B(x_0,r)\subset E_{n_0}$. 由于$E_{n_0}$是线性空间，因而$x\in E_{n_0}$. 于是得到$E_{n_0}=E^\infty$，这与$E_{n_0}$是$(E^\infty,\|\cdot\|)$的真子空间发生矛盾. 因此，$E_{n_0}$在$(E^\infty,\|\cdot\|)$内是无处稠密的，从而Banach空间$(E^\infty,\|\cdot\|)$是第一纲的集，这是荒谬的.

注　可以证明，具有无穷Hamel维数α的线性空间可赋予完备

范数的充要条件是$a^{\aleph_0}=a$，这里$\aleph_0$代表可数集的势(参看[183])。因为$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是线性空间E^∞的一个Hamel基，故知E^∞的Hamel维数是$\aleph_0$，而$\aleph_0^{\aleph_0}\neq\aleph_0$，因此，不能在$E^\infty$上赋予完备范数.

14．存在某个线性空间上的两个完备范数，其和并不完备.

在线性空间c_0上取两个不可比较的完备范数$\|\cdot\|_{c_0}$与$\|\cdot\|$(参看例10).令

$$|||x|||=\|x\|_{c_0}+\|x\|,(x\in c_0),$$

据Banach逆算子定理，范数$|||\cdot|||$不完备.

15．存在某个线性空间上的两个不完备范数，其和完备.

我们用$C^1[0,1]$代表定义在区间[0，1]上的具有连续导数的函数全体，并定义线性运算如常．在线性空间$C^1[0,1]$上取范数

$$\|x\|_c=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|,$$
$$\|x\|=\max_{0\leq t\leq 1}|x'(t)|+|x(0)|,$$

其中$x\in C^1[0,1]$．易见，范数$\|\cdot\|_c$与$\|\cdot\|$均不完备，而其和$|||\cdot|||=\|\cdot\|_c+\|\cdot\|$却是完备的.

16．一个 Banach 空间中的第一纲子空间，它本身并非第一纲空间.

二维欧氏空间$\mathbf{R}^2$中的一维子空间$\mathbf{R}^1$显然是$\mathbf{R}^2$内的一个第一纲子空间(因$\mathbf{R}^1$的闭包不含有$\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}^1$的内点，故其自身就是$\mathbf{R}^2$内的一个无处稠密集)．然而，$\mathbf{R}^1$自身却构成了一个完备度量空间，因而是第二纲空间.

注　上述反例说明当X为一个度量空间，X_0为其子空间时，X_0为X内的第一纲集与X_0自身是第一纲空间的概念并不是一回事.

可以证明，设X为一度量空间，$X_0\subset X$．若X_0为X的第一纲集，且X_0在X中稠密，则X_0自身也构成第一纲空间(参看[11]，pp．242—243).

17. 不完备的第二纲空间.

完备度量空间必为第二纲的，其逆不真. 例如，设X为无理数全体，对$x,y\in X$，令$d(x,y)=|x-y|$，则(X,d)就是一个不完备的第二纲的度量空间.

注　利用Hamel基，可以在任意无穷维 Banach空间X内作出不完备的第二纲线性子空间. 事实上，设H是X的Hamel 基，从H中取一可数真子集$\{h_n\}\subset H$，并令

$$X_0=\text{span}\{H\setminus\{h_n\}\},$$

$$X_n=\text{span}\{H\setminus\{h_k:k\geqslant n+1\}\},n=1,2,\cdots.$$

那么，显然有 $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}X_n$，并且由$X$的完备性可知$X$是第二纲的. 因此，$X_n(n\geqslant 0)$不能全为第一纲的(因为由定义显然可知，可数个第一纲集之并仍为第一纲的)，因而不妨设X_{n_0}为第二纲的线性子空间，并且，当注意到第二纲集的定义时，可知$\overline{X}_{n_0}$在X中必有内点，即有X中一球$B[x_0,\delta]\subset\overline{X}_{n_0}$. 于是，由$\overline{X}_{n_0}$是线性的可推出$\overline{X}_{n_0}=X$. 另一方面，由定义我们显然可知$X_{n_0}\subset X$，$X_{n_0}\neq X$，即$X_{n_0}$不是闭的，从而$X_{n_0}$不会是完备空间. 因此，$X$的线性子空间$X_{n_0}$即为所要求的.

18. 一个不完备的赋范线性空间X及X的闭子空间M，使商空间X/M完备.

如所周知，若赋范线性空间X完备，而M是X的闭子空间，则商空间X/M也必完备. 应当注意，这个命题之逆并不成立. 例如，设X为空间c中使$\{\xi_n\}$仅有有限个坐标非0的元的全体；M为X中使$\{\xi_n\}$的前n_0项(n_0为某一固定正整数)坐标全为0的元之全体，那么M是X的闭线性子空间，且商空间X/M是完备的，但X却不完备(参看例13).

注　其实可以证明，赋范线性空间 X 为完备的充要条件是对 X 的每个闭子空间 M，M 与 X/M 皆完备（参看[11]，pp.51—53）.

19. 存在某个赋范线性空间的子空间 M 及点 x_0，使 x_0 到 M 的最近元不是唯一的.

对每一 $p=(x,y)\in \mathbf{R}^2$，令 $\|p\|=\max\{|x|,|y|\}$，则 $(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间. 设 $M=\{(x,0):x\in\mathbf{R}^1\}$，$p_0=(0,1)$，因为对任意 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$p=(x,0)\in M$ 且 $d(p_0,M)=d(p_0,p)$，所以 p_0 到 M 的最近元有无穷多个.

注　可以证明，若 M 为严格凸空间 X 的任一有限维线性子空间，那么对任意 $p_0\in X$，在 M 内必存在唯一的一个对于 p_0 的最近元 p（参看[11]，p.217）. 上述反例说明了在这个命题中 X 为严格凸的条件不可去掉.

20. Riesz引理中的实数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 不能加强为 $\alpha=1$.

Riesz引理　设 X 是赋范线性空间，X_0 是 X 的闭的真子空间，则对 $0<\alpha<1$，必存在 $x_\alpha\in X$，适合 $\|x_\alpha\|=1$ 且 $\|x_\alpha-x\|\geqslant\alpha$ 对一切 $x\in X_0$ 成立.

应当注意，Riesz引理中的实数 α 不能取作1. 例如，设 X 为定义在区间 $[0,1]$ 上适合 $x(0)=0$ 的全体连续函数 $x(t)$，按通常线性运算所成的线性空间. 对 $x\in X$，令

$$\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

则 $(X,\|\cdot\|)$ 成为一个Banach空间. 令

$$X_0=\left\{x:x\in X\text{ 且}\int_0^1 x(t)\,dt=0\right\}.$$

易见，X_0 是 X 的闭的真子空间. 兹证不存在 $x_0\in X$ 适合 $\|x_0\|=1$，且 $\|x_0-x\|\geqslant 1$ 对一切 $x\in X_0$ 成立. 反设存在 $x_0\in X$ 适合 $\|x_0\|=1$，且 $\|x_0-x\|\geqslant 1$ 对一切 $x\in X_0$ 成立，于是对每一 $y\in X\backslash X_0$，若令

$$b_y=\frac{\int_0^1 x_0(t)\,dt}{\int_0^1 y(t)dt},$$

就有$\int_0^1[x_0(t)-b_yy(t)]dt=0$，从而$x_0-b_yy\in X_0$，因而得到

$$1\leqslant\|x_0-(x_0-b_yy)\|=\|b_yy\|,$$

即

$$\frac{1}{|b_y|}\leqslant\|y\|.$$

根据b_y的定义，经过简单的计算可得

$$\left|\int_0^1 y(t)dt\right|=\frac{\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|}{|b_y|}$$

$$\leqslant\|y\|\left|\int_0^1 x_0(t)dt\right|. \tag{1}$$

对每一正整数n，显然有$g_n(t)=t^{\frac{1}{n}}\in X\setminus X_0$. 把$g_n$代入(1)式，就得到

$$\frac{n}{(1+n)}=\left|\int_0^1 g_n(t)dt\right|\leqslant\|g_n\|\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|.$$

由于 n 是任意正整数，因而$1\leqslant\left|\int_0^1 x_0(t)dt\right|$.但是，条件$x_0\in X$，$\|x_0\|=1$及$x_0(0)=0$蕴涵$\left|\int_0^1 x_0(t)\,dt\right|<1$，从而导致预期的矛盾.

21. 属于l^p而不属于$l^r(1\leqslant r<p<+\infty)$的元素.

设$x=\left(1,\frac{1}{2^{\frac{1}{r}}},\ \frac{1}{3^{\frac{1}{r}}},\cdots,\ \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}},\cdots\right)$，因$\frac{p}{r}>1$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{r}}}$ 收

敛，从而$x\in l^p$.然而，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，因而$x\notin l^r$.

注 容易证明，当$1\leqslant r<p<+\infty$时，就有$l^r\subset l^p$. 上述反例说明了这个包含关系是严格的.

22. 属于$\bigcap_{n=1}^{\infty} l^{1+\frac{1}{n}}$而不属于$l$的元素.

设$x=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k},\cdots)$，则对任意正整数$n$，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{n}}}$收敛，故$x\in l^{1+\frac{1}{n}}$，从而$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} l^{1+\frac{1}{n}}$. 但因级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$发散，故$x\notin l$.

注 容易证明$l\subset\bigcap_{n=1}^{\infty} l^{1+\frac{1}{n}}$. 上述反例说明了这个包含关系是严格的.

23. 属于c_0而不属于$\bigcup_{n=1}^{\infty} l^n$的元素.

设$\xi_k=\frac{1}{\ln(1+k)}$，$k=1,2,\cdots$，则$x=\{\xi_k\}\in c_0$. 但对任意正整数n，级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(1+k)}$是发散的，故$x\notin l^n$，从而$x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty} l^n$.

注 容易证明，$\bigcup_{n=1}^{\infty} l^n\subset c_0$. 上述反例表明了这个包含关系是严格的.

24. 存在点列$\{x_n\}\subset l^r$，使$\{x_n\}$在$l^p(1\leqslant r<p<+\infty)$中收敛而在$l^r$中不收敛.

设$x_n=(n^{-\frac{1}{r}},\cdots,n^{-\frac{1}{r}},0,0,\cdots)$，则$x_n\in l^r\subset l^p$，$n=1,2,\cdots$，

其中 $1\leqslant r<p<+\infty$. 因为

$$\|x_n\|_{l^p}=(n^{-\frac{p}{r}}+\cdots+n^{-\frac{p}{r}})^{\frac{1}{p}}$$
$$=(n\cdot n^{-\frac{p}{r}})^{\frac{1}{p}}$$
$$=(n^{1-\frac{p}{r}})^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故 $\{x_n\}$ 在 l^p 中收敛于 0. 但因

$$\|x_n\|_{l^r}=(n^{-1}+\cdots+n^{-1})^{\frac{1}{r}}=1,\quad n=1,2,\cdots$$

故 $\{x_n\}$ 在 l^r 中不收敛.

注 容易证明，若 $1\leqslant r<p<+\infty$, $\{x_n\}\subset l^r$, 且 $\{x_n\}$ 在 l^r 中收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 在 l^p 中也收敛于 x. 上述反例说明了这个命题反过来是不正确的.

25. 存在某个线性空间上的两个范数及点列 $\{x_n\}$，使 $\{x_n\}$ 在这两个范数下均收敛而极限不同.

我们用 P 代表一切实多项式按通常的线性运算所成的线性空间. 对 $x(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\in P$, 令

$$\|x\|_N=\left|\sum_{j=0}^{n}a_j\right|+\sum_{j\neq N}\frac{|a_j|}{j+1},$$

这里, N 是某个固定的正整数. 易见,

$$\|x-y\|_N\leqslant\|x\|_N+\|y\|_N,$$
$$\|\alpha x\|_N=|\alpha|\,\|x\|_N,\quad \|x\|_N\geqslant 0.$$

应证 $\|x\|_N=0$ 当且仅当 $x(t)\equiv 0$. 事实上, 若 $x(t)\equiv 0$, 则显然有 $\|x\|_N=0$. 反之, 若 $\|x\|_N=0$, 则有

$$\text{(A)}\qquad \left|\sum_{j=0}^{n}a_j\right|=0,$$

$$\text{(B)}\qquad \sum_{j\neq N}\frac{|a_j|}{j+1}=0.$$

由等式(B)得到 $a_j=0\,(j\neq N)$, 再由等式(A) 得到 $a_N=0$, 因此 $x(t)\equiv 0$. 于是, $\|\cdot\|_N$ 是线性空间 P 上的一个范数.

令 $x_n(t)=t^n$，则$\{x_n\}$在$(P,\|\cdot\|_N)$中收敛于 t^N，这是因为

$$\|t^N-t^n\|_N=\frac{1}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

另一方面，我们任取多项式$x_0\in P$，并令$y_n=x_n-x_0$，$n=1,2,\cdots$. 因为$\{x_n\}$线性无关，即$\{x_n\}$中任意有限个元都是线性无关的，所以$\{y_n\}$也构成了一个线性无关的点列. 设M是集$\{y_n\}$张成的P的线性子空间，则对任一 $y\in M$可唯一地表成

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n y_n$$

的形式，这里，和式中只有有限多个a_n不为0. 在M上定义范数

$$\|y\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

然后把它扩张到整个空间P上. 于是，由关系式

$$\|x_n-x_0\|=\|y_n\|=\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

可知，$\{x_n\}$在$(P,\|\cdot\|)$中收敛于 x_0.

这个例子是由 Laugwitz[138]作出的. Laugwitz 还证明了线性空间X的子集是无穷维的（即它不包含于某个有限维线性子空间之中），当且仅当它含有这样的点列$\{x_n\}$，使在X上适当地选择两个范数后，$\{x_n\}$收敛于两个不同的极限.

26. 存在某个线性空间X上的两个范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$及子集 A，使 A 在$(X,\|\cdot\|)$与$(X,\|\cdot\|_1)$中都是紧的，而在$(X,\|\cdot\|+\|\cdot\|_1)$中不紧.

在线性空间 c_0 上取两个不可比较的范数$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$（参看例10），并设$\{x_n\}$在$(c_0,\|\cdot\|)$中收敛于 a，而在$(c_0,\|\cdot\|_1)$中收敛于 b，且 $a\neq b$. 令

$$A=(a,b,x_1,x_2,\cdots),$$

则A在$(c_0,\|\cdot\|)$与$(c_0,\|\cdot\|_1)$中都是紧的，而在$(c_0,\|\cdot\|+\|\cdot\|_1)$中不是紧的。

27. 赋范线性空间上不连续的线性泛函。

在 l 上取范数$\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$，其中 $x=\{\xi_n\}\in l$，则$(l,\|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n.$$

易见，f 是 l 上的线性泛函. 兹证 f 不连续. 为此，只要证明 f 并不有界即可. 对任意正整数 n，令$x=\sum\limits_{k=1}^{n}e_k$，其中 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则 $x\in l$ 且$\|x\|=1$，$f(x)=n$. 于是$\|f\|\geqslant n$，即 f 是无界的.

注 容易证明，有限维赋范线性空间上的线性泛函都是连续的. 对于无穷维赋范线性空间X，必定可以作出X上不连续的线性泛函. 事实上，设$\{x_n\}$为X中的线性无关的点列. 因X是无穷维的，故这种点列是存在的. 令M是由点列$\{x_n\}$张成的线性子空间，取 $\varepsilon_n>0$，使$\|\varepsilon_n x_n\|<\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，在$M$上定义泛函 f 如下：

$$f(x_n)=\frac{1}{\varepsilon_n},\ n=1,2,\cdots$$

当 $x=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k x_k\in M$时，令

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k f(x_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\varepsilon_k}.\end{aligned}$$

显然，f为M上的一个线性泛函．以H表X的一个 Hamel 基，使$H\supset\{x_n\}$．作泛函g：

$$g(x_n)=f(x_n),n=1,2,\cdots;$$

$$g(x)=0,\text{当}x\in H\setminus\{x_n\}\text{时};$$

而对X中任一x，$x=\sum_{k=1}^{s}\beta_k x_k',x_1',\cdots,x_s'\in H$，令

$$g(x)=\sum_{k=1}^{s}\beta_k g(x_k').$$

g显然是X上的线性泛函．因$\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon_n x_n\|=0$，而$\lim_{n\to\infty}g(\varepsilon_n x_n)=1$，故$g$不连续．

28．赋范线性空间中不闭的线性子空间．

赋范线性空间中的线性子空间不必是闭的．例如，我们用E^∞代表只有有限个非零坐标的数列$x=\{\xi_n\}$所成的线性空间，并令

$$\|x\|=\left(\sum_n|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则E^∞是l^2的一个线性子空间．在E^∞中取点列$x_1=(1,0,0,\cdots)$，$x_2=\left(1,\frac{1}{2},0,\cdots\right),\cdots,x_n=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},0,\cdots\right),\cdots$，并令$x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\frac{1}{2^n},\cdots\right)\in l^2$，则

$$\|x_n-x\|=\left(\sum_{i=n}^{\infty}\left|\frac{1}{2^i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

即$\{x_n\}$收敛于x．由于$x\notin E^\infty$，故E^∞是l^2中的一个不闭的子空间．

注 有限维赋范线性空间中的任何线性子空间都是闭的．另一方面，在任何无穷维赋范线性空间X上总可作出不连续的线性泛函f(参看例 27)，此时$M=\{x:x\in X,f(x)=0\}$是X的一个不

闭的线性子空间。因此，任何无穷维赋范线性空间中总存在不闭的线性子空间。

29．存在某个赋范线性空间中没有内点的凸的均衡吸收集.

设 f 是无穷维赋范线性空间 X 上的不连续的线性泛函（参看例 27 的注），令

$$B=\{x:x\in X,|f(x)|\leqslant 1\}.$$

易见，B 是 X 中的凸的均衡吸收集.

兹证 B 没有内点. 假若 B 有内点 b，则存在正数 r，使

$$S(b,r)=\{x:x\in X,\|x-b\|<r\}\subset B.$$

于是对任何满足不等式 $\|a\|<1$ 的点 $a\in X$，都有 $b+ra\in S(b,r)$，从而 $|f(b+ra)|\leqslant 1$，因此

$$|f(a)|\leqslant\frac{(1+|f(b)|)}{r}. \tag{1}$$

现任取 $x\in X$，并令 $a=\dfrac{x}{2\|x\|}$，$x\neq 0$，则 $\|a\|<1$，故由(1)式得到

$$\left|f\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right|\leqslant\frac{1+|f(b)|}{r}.$$

即 $|f(x)|\leqslant\dfrac{2(1+|f(b)|)\|x\|}{r}$，故 $\|f\|<+\infty$，这与 f 是 X 上的不连续的线性泛函发生矛盾. 因此，B 没有内点.

30．存在某个赋范线性空间内稠密的凸的均衡吸收的真子集.

设 f 是无穷维赋范线性空间 X 上的不连续的线性泛函（参看例 27 的注），令 $B=\{x:x\in X,|f(x)|\leqslant 1\}$，则 B 是 X 中的凸的均衡吸收集.

兹证 B 在 X 中稠密. 事实上，由于 f 不连续，因而 $\{x:x\in X,f(x)=0\}$ 不是闭的，而是 X 的稠密集（参看[11]，p. 103）. 于是，B 在 X 中也稠密.

31．存在某个赋范线性空间中的无处稠密的闭的凸均衡吸收集.

在 E^{∞} 上取范数 $\|x\|=\sup\limits_k|\xi_k|$，$x=\{\xi_k\}\in E^{\infty}$，则 $(E^{\infty},\|\cdot\|)$ 为

一赋范线性空间．令

$$A=\left\{x=\{\xi_k\}:\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\leqslant 1, n=1,2,\cdots\right\},$$

A 显然是凸的均衡集．因对任意 $x=\{\xi_k\}\in E^\infty$，$x\neq 0$，令 $t=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|$，当 $0<\varepsilon<\frac{1}{t}$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\xi_k\right|<\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{t}\right|$$

$$\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}$$

$$\leqslant 1,$$

故 $\varepsilon x\in A$，即 A 是吸收的．又因为

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x:\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\leqslant 1\right\},$$

所以 A 是闭集．兹证 A 没有内点，从而它是一个无处稠密集．

(i) 零元素不是 A 的内点．事实上，我们有

$$\left\|\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k\right\|=\left\|\left(\frac{2}{n},\cdots,\frac{2}{n},0,0,\cdots\right)\right\|$$

$$=\frac{2}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

而对每一 n，都有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\right|=2$，即 $\left(\frac{2}{n},\cdots,\frac{2}{n},0,\cdots\right)\notin A$．由此可知，$0\notin\mathring{A}$．

(ii) 任意 $x\in E^\infty$ 都不是 A 的内点．我们先证明等式：

$$B(x,r)-B(x,r)=B(0,2r),$$

其中$B(x,r)=\{y:\|x-y\|<r\}$. 设 $y\in B(0,2r)$，则$\|y\|<2r$.
令 $u=x+\dfrac{y}{2}$, $v=x-\dfrac{y}{2}$,则 $u,v\in B(x,r)$,且$y=u-v$,故

$$y\in B(x,r)-B(x,r).$$

反之,设$y\in B(x,r)-B(x,r)$,即

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)-\left(x-\frac{y}{2}\right)\in B(x,r)-B(x,r),$$

则$\left\|\dfrac{y}{2}\right\|<r$,从而$\|y\|<2r$,即$y\in B(0,2r)$.

我们再证x不是A的内点. 假若x是A的内点，那么将存在$B(x,r)\subset A$. 由于A是凸集,故 $A=\dfrac{1}{2}(A+A)$；又A是均衡的,故$A=-A$. 于是得到

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}(A+A)=\frac{1}{2}(A-A)\\&\supset\frac{1}{2}[B(x,r)-B(x,r)]\\&=\frac{1}{2}B(0,2r)\\&=B(0,r).\end{aligned}$$

因此,0 是A的内点,这与(i)发生矛盾.

32. 存在某个赋范线性空间中的子集，它的线性闭包不等于它的闭包张成的线性子空间.

容易证明,赋范线性空间中的子集的线性闭包（即包含该集的最小闭线性子空间）等于它所张成的线性子空间的闭包（参看[326],p. 177). 然而,一个集的线性闭包未必等于它的闭包张成的线性子空间. 例如,点列$\{e_n\}$是 Banach 空间 c 中的闭集，它所张成的线性子空间是E^∞,而E^∞在 c 中不闭. 另一方面,$\{e_n\}$ 的线性闭包是 c 中的闭集,故它不等于E^∞.

33. 存在某个赋范线性空间中的无限集，它的线性闭包不等于它

的元素的无限线性组合所成的线性子空间.

设A是赋范线性空间X的子集，S_1 是A的线性闭包，S_2 是A中的元素的无限线性组合所成的线性子空间，即

$$S_2=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n: a_n \text{均为数}, x_n\in A\right\}.$$

容易证明，$S_2\subset S_1$. 事实上，任取 $x\in S_2$，则存在数列$\{a_n\}$ 及点列$\{x_n\}\subset A$，使

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\to x \quad (n\to\infty).$$

因S_1是包含A的闭线性子空间，故 $x\in S_1$.

应当注意，包含关系$S_2\subset S_1$一般说来是严格的. 例如，我们考虑实 Banach 空间$C[0,1]$，并令

$$A=\{t^n: n=0,1,2,\cdots\},$$

则A是$C[0,1]$的子集. 据Weierstrass逼近定理，$S_1=C[0,1]$. 另一方面，对于函数$\left|t-\frac{1}{2}\right|\in C[0,1]$而言，它不能表成$A$中的元素$t^n$ 的无限线性组合，这是因为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $C[0,1]$ 中的收敛性等价于它在区间$[0,1]$上的一致收敛性，其和函数应当可微，然而函数$\left|t-\frac{1}{2}\right|$在$t=\frac{1}{2}$处并不可微，所以$\left|t-\frac{1}{2}\right|\notin S_2$，从而 $S_1\neq S_2$.

34. 存在某个赋范线性空间中的两个闭集，其和不是闭集.

设$Z=l^2\times l^2$，并在Z上取范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|,$$

这里，$x=\{\xi_n\}\in l^2$，$\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 又设$M$是$Z$的闭子空间$l^2\times\{0\}$，$T$是由 l^2 到 l^2 的某个稠密的真子空间上的一对一的有界

线性算子．例如，可取

$$Tx=T\{\xi_n\}=\left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}\in l^2.$$

令$N=\{(x,Tx):x\in l^2\}$．显然，N是Z的闭子空间．因为T是一对一的且$R(T)\neq l^2$，所以$M\cap N=\{(0,0)\}$，$M+N\neq Z$．任取$(x,y)\in Z$，存在点列$\{Tx_n\}$，它收敛于y，于是得到

$$(x-x_n,0)+(x_n,Tx_n)\to(x,y)(n\to\infty).$$

因此，$M+N$在Z中稠密，从而$M+N$不闭．

注　容易证明，若A与B是某个赋范线性空间中的闭集，且其中至少有一个是紧的，则$A+B$必为闭集．上述反例说明了当A与B均不是紧集时，$A+B$不必为闭集．

35．设A与B都是赋范线性空间中的闭凸集，C是有界集，则$A+C=B+C$蕴涵$A=B$．上述条件缺一不可．

下面的例子是由Zwier和Puckle[238]作出的．

(i) 若C无界，可取C为实直线，$A=\{0\}$，$B=\{1\}$．

(ii) 若A不凸，可取$A=\{0,1\}$，$B=C=[0,1]$．

(iii) 若A不闭，可取$A=C=[0,1)$，$B=[0,1]$．

36．$C[0,1]$中的一个闭凸子集，它不含有最小范数的元素．

考虑Banach空间$C[0,1]$的子集

$$M=\left\{x:x\in C[0,1]\text{ 且 }\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1x(t)dt=1\right\}.$$

易证，M是闭集．事实上，设$x_n\in M$且$x_n\to x_0(n\to\infty)$，即

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x_n(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1x_n(t)dt=1,$$

且$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0(n\to\infty)$．于是得到

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x_n(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1x_n(t)dt$$

$$\to \int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)dt \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)dt = 1,$$

所以 $x_0\in M$，即M是闭集．又，任取 $x,y\in M$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta=1$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}[\alpha x(t)+\beta y(t)]dt - \int_{\frac{1}{2}}^1[\alpha x(t)+\beta y(t)]dt = 1,$$

所以 $\alpha x+\beta y\in M$，即M是凸集．

不难看出，若 $x\in M$，则$\|x\|>1$．今在区间$[0,1]$上定义连续函数 $x_n(t)$：

$$x_n(t)=\begin{cases}1+\varepsilon_n, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n},\\ \text{线性}, & \frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n},\\ -(1+\varepsilon_n), & \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

这里，$\{\varepsilon_n\}$是正数列且 $\varepsilon_n\to 0\,(n\to\infty)$．经过简单的计算，可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x_n(t)dt = 1.$$

因此，$x_n\in M$．由于$\|x_n\|=1+\varepsilon_n$ 且 $\varepsilon_n\to 0\,(n\to\infty)$，因而$M$中不存在最小范数的元素．

注 我们有下述命题：设M是Hilbert空间中的非空闭凸子集，则M含有唯一的最小范数的元素．换言之，存在一个且只有一个 $x_0\in M$，使对任何 $x\in M$，$x\neq x_0$，都有$\|x_0\|<\|x\|$（参看[11]，pp. 215—216)．上述反例表明了对于一般的Banach空间中的非空闭凸子集，这个命题并不成立．

又，上述命题还可作如下推广：设M是 Hilbert 空间H中的非空闭凸子集，则对任意$x\in H$，存在唯一的$y\in M$，使对任何$z\in M$，$z\neq y$，都有$\|y-x\|<\|z-x\|$. 人们猜测这个命题之逆也成立，即若M是 Hilbert 空间H的非空子集，使对每一$x\in H$，有唯一最近的点$y\in M$，则M是H的闭凸子集。关于这个猜测，至今尚未得到证实.

37. $L[0,1]$中的一个闭凸子集，它含有无穷多个最小范数的元素.

令$M=\left\{x: x\in L[0,1]\text{且}\int_0^1 x(t)dt=1\right\}$. 不难看出，$M$是$L[0,1]$中的一个闭凸子集. 任取$x\in M$，由不等式

$$1=\int_0^1 x(t)dt\leqslant\int_0^1 |x(t)|dt=\|x\|$$

可知，M中最小范数的元素其范数应为1，而适合$\|x\|=1$的元素$x\in M$显然有无穷多个.

注 设X为一赋范线性空间，对任意给定的$x\in X$，用$y\in M$来逼近x，这里，M是X的某个固定的子空间. 令

$$d=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

若存在$y_0\in M$使$\|x-y_0\|=d$，则y_0叫做x在M中的最佳逼近. 易知，最佳逼近y_0是到给定的x距离最小的元. 例 36 与例 37 说明了这种$y_0\in M$可以存在，也可以不存在；即使存在，也未必唯一. 关于最佳逼近，有下述基本定理.

存在性定理 若M是赋范线性空间X的有限维子空间，则对每一$x\in X$，存在M中的关于x的最佳逼近.

唯一性定理 在严格凸赋范线性空间X中，关于$x\in X$在给定的子空间M中至多有一个最佳逼近.

对 Hilbert 空间H中的每一给定的x及每一给定的H的闭子空间M，关于x的在M中的最佳逼近存在且唯一.

在赋范线性空间中，若x在子空间M中的最佳逼近不唯一，则x就有无穷多个最佳逼近.

38. 存在某个 Banach 空间 X 的子集 A，使 A 的每个无限子集张成的线性子空间在 X 中稠密.

取 $X=c_0$，并令 $A=\{(t,t^2,t^3,\cdots)\in c_0, 0<t<1\}$. 易见，$A$ 的每个无限子集张成的线性子空间在 c_0 中稠密.

39. 不可分的Banach 空间.

Banach 空间 l^∞ 不可分(参看第一章例 17).

注 容易证明，在可分度量空间中，孤立点集必定是可数的. 对于不可分度量空间，孤立点集未必可数. 例如，令

$$A=\{x:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\ \xi_i=0 \text{ 或 } 1,\ i=1,2,\cdots\},$$

则 A 为 Banach 空间 l^∞ 中的一个不可数的孤立点集.

40. 一个可分 Banach 空间，其共轭空间不可分.

Banach 空间 l 是可分的，但其共轭空间 l^∞ 并不可分.

注 如果 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 可分，那么 X 亦必可分(参看[11]，pp. 201—202). 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

基于例40，便产生下述问题：若 X 是可分的 Banach 空间，而 X^* 不可分，则 X 是否必定含有线性同胚于 l 的子空间. Lindenstrauss 和 Stegall[202] 于 1975 年作出了一个可分的 Banach 空间，它不含有线性同胚于 l 的子空间，且它的各阶共轭空间均不可分.

James[145] 指出，对于任意正整数 n，可构造一个 Banach 空间 B_n，使 B_n 的 n 阶共轭空间是它的第一个不可分的共轭空间.

41. 存在不可分的Banach空间，它有可分的无穷维商空间.

因为 l^2 与 l^∞ 的一个商空间线性同胚(参看第八章例 16)，所以不可分 Banach 空间 l^∞ 有可分的无穷维商空间.

注 Lacey[186] 指出，若 S 是紧 Hausdorff 空间，则 $C(S)$ 有可分的无穷维商空间.

是否每个 Banach 空间都有可分的无穷维商空间？这是尚未解决的一个问题.

42. 某个赋范线性空间 X 与 $f\in X^*$，而不存在 $x\in X$，使 $\|x\|=1$ 且 $f(x)=\|f\|$.

由 Hahn-Banach定理可知，若 X 为一赋范线性空间，$x\in X$，$x\neq 0$，则存在 $f\in X^*$，使 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|x\|$. 所宜注意的是：对偶命题并不成立，即给定 $f\in X^*$，$f\neq 0$，不必存在 $x\in X$，使 $\|x\|=1$ 且 $f(x)=\|f\|$. 例如，对 $x=\{\xi_n\}\in c$，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi_n}{n!}.$$

易见，f 是 c 上的连续线性泛函，即 $f\in c^*$.

取 $x\in c$，使 $\|x\|=\sup_n|\xi_n|\leqslant 1$，则

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

从而

$$\|f\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{1}$$

另一方面，对任意正整数 m，令

$$x=(-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^m,0,0,\cdots),$$

其中 $(-1)^m$ 是第 m 位上的一个数，则 $x\in c$ 且 $\|x\|=1$. 此时有

$$|f(x)|=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!},$$

从而 $\|f\|\geqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}$. 因 m 是任取的正整数，故

$$\|f\|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{2}$$

由(1),(2)得到$\|f\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

兹证不存在 $x\in c$,使$\|x\|=1$ 且 $f(x)=\|f\|$. 为此,任取 $x=\{\xi_n\}\in c$ 且 $\|x\|\leqslant 1$, 则对任意 n, 均有$|\xi_n|\leqslant 1$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$ 而 $|\xi|<1$,则对充分大的 n 有$|\xi_n|<1$,从而

$$|f(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi_n}{n!}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\|f\|.$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$ 而 $\xi=1$,则存在正整数 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时就有$\xi_n>0$,故 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi_n}{n!}$是一个交错级数,因而也有

$$|f(x)|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\|f\|.$$

同理,若$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$ 而 $\xi=-1$,则也有$|f(x)|<\|f\|$.

总之, 对任意 $x\in c$,$\|x\|\leqslant 1$, 恒有$|f(x)|<\|f\|$, 即不存在 $x\in c$,使$\|x\|=1$ 且$|f(x)|=\|f\|$.

4.3. l (或 l^∞)中存在两个线性无关元 x 与 y,适合$\|x-y\|\cdot\|x+y\|=|\|x\|^2-\|y\|^2|$.

Diminnie 和 Albert[86] 提出下述问题: 若 $x,y\in l^p$,$1\leqslant p\leqslant+\infty$, $x,y\neq 0$ 且$\|x-y\|\cdot\|x+y\|=|\|x\|^2-\|y\|^2|$, 则是否一定存在某个实数 α,使 $y=\alpha x$?

Lagnese[136]指出,当 $1<p<+\infty$时,这样的实数α一定存在. 实际上,他证明了一个更为一般的命题: 若X 是严格凸的Banach空间,$x,y\in X$,$x,y\neq 0$,且$\|x-y\|\cdot\|x+y\|=|\|x\|^2-\|y\|^2|$,则 x 与 y 必定是线性相关的. 但是,对于空间 l 和 l^∞,相应的命题并不成立. 例如, 取 $x=\left(\frac{1}{2},1,0,0,\cdots\right)$, $y=\left(0,\frac{1}{2},0,0,\cdots\right)$, 则 $\|x-y\|\cdot\|x+y\|=|\|x\|^2-\|y\|^2|$,然而 x 与 y 是线性无关的.

44. 存在赋范线性空间 X 及 x, $y\in X$, 使

$$\|x-y\|\geq\frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

不成立.

Dunkl 和Williams[93]证明了：若 X 是赋范线性空间，则对任意 x, $y\in X$, $x\neq0$, $y\neq0$, 有

$$\|x-y\|\geq\frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|. \tag{1}$$

对于复内积空间，有

$$\|x-y\|\geq\frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \tag{2}$$

应当注意，对于一般的赋范线性空间，不等式(2)并不成立. 例如，对 $x=(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2$, 令 $\|x\|=|x_1|+|x_2|$, 则 $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间. 取 $x=(1, \varepsilon)$, $y=(1, 0)$, 这里 $\varepsilon>0$ 且充分小，则不等式(1)成为

$$\varepsilon\geq\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

因此，常数 1/4 显然是最好的.

问题 若不等式(2)成立，则 X 是否必为内积空间?

45. 存在某个 Banach 空间中的闭凸集，它没有端点.

由 Krein-Milman 定理可知，若 X 为自反 Banach 空间，$B(X)$ 是 X 中的单位闭球：$B(X)=\{x:x\in X, \|x\|\leq1\}$, 则 $\text{ext}\,B(X)\neq\varnothing$ (参看[15], p.165). 应当注意，对于不自反的 Banach 空间，这个命题并不成立.

第一例　设 $X=L[a,b]$,则 $\text{ext}B(X)=\varnothing$. 事实上,对 $B(X)$ 中的元 x, $\|x\|=1$, 存在 $c\in[a, b]$, 使 $\int_a^c|x(t)|\,dt=\frac{1}{2}$. 令

$$x_1(t)=\begin{cases}2x(t), & t\in[a, c),\\ 0, & t\in[c, b],\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}0, & t\in[a, c),\\ 2x(t), & t\in[c, b].\end{cases}$$

显然，$\|x_1\|=\|x_2\|=1$，$x=(x_1+x_2)/2$，因此 $x\notin \mathrm{ext}B(X)$. 由x的任意性得 $\mathrm{ext}B(X)=\varnothing$.

第二例　设 $X=c_0$，对 $x=\{x_n\}\in B(X)$，存在正整数 k，使 $|x_k|<\frac{1}{2}$. 取点列 $y=\{y_n\}$，$z=\{z_n\}$，其中 $y_n=z_n=x_n(n\neq k)$，而 $y_k=x_k-\frac{1}{2}$，$z_k=x_k+\frac{1}{2}$，则 $y\neq z$，y，$z\in B(X)$，且 $x=\frac{y+z}{2}$，从而 $x\notin \mathrm{ext}B(X)$.

注　端点概念可回溯到 Minkowski（参看[221]，卷 II，pp. 157—161），他证明了：若C是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个紧凸集，则C的每个点必可表为C的端点的一个凸组合，即表为一个求和$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$，其中$\lambda_i>0$，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，且每个 x_i 都为C的端点. Carathéodory 将它作了进一步加强，他证明了：若C是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧凸子集，则 C 的每个点可表为C中至多 $n+1$ 个端点的一个凸组合. 1940 年，Krein 和 Milman[121]将上述命题推广到无穷维空间，他们证明了：若C是局部凸空间的非空紧子集，则 $\mathrm{ext}\,C$非空. 若C又是凸集，则C是 $\mathrm{ext}\,C$ 的闭凸包.

下面是一个多年未解决的问题：如果C是 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空紧凸子集，那么C必有端点吗？1977 年，Roberts[264]构造了一个例子说明回答是否定的. 读者如有兴趣，可参看作者原文.

46. 具有 Krein-Milman 性质的非自反 Banach 空间.

设X是 Banach 空间，若对任何有界闭凸集A，有 $A=\overline{\mathrm{co}}$

$(\mathrm{ext}A)$，则称X具有 Krein-Milman 性质，简称X具有 KMP.

可以证明，自反 Banach 空间必具有KMP.应当注意，这个命题之逆不真. Lindenstrauss[194]指出，非自反 Banach 空间 l 具有 KMP.事实上，令 $E=\mathrm{ext}B(l)$，为证 $B(l)=\overline{\mathrm{co}}(E)$，我们首先证明$E$是由$e_n$及$-e_n(n=1,2,\cdots)$所构成的，其中$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$. 先证每个 e_n 都在E内. 假定$e_n=\dfrac{(x+y)}{2}$，其中 $x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}\in B(l)$. 于是，$1=\dfrac{(x_n+y_n)}{2}$，$|x_n|\leqslant 1$，$|y_n|\leqslant 1$，这就是说 $x_n=y_n=1$.由于$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，便知对于 $i\neq n$，有$x_i=y_i=0$，因此 $x=y=e_n$，从而$e_n\in E$.反之，设$x=\{x_n\}\in B(l)$并假定对于一切n，$x\neq\pm e_n$.我们可以假定$\|x\|=1$，不然 x 显然不会是一个端点.于是我们可以写成 $x=y+z$，这里$y=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots)$，$z=(0,\cdots,0,x_{k+1},x_{k+2},\cdots)$，$y$ 与 z 都不是零序列. 令 $u=\left(\dfrac{1}{\|y\|}\right)y$，$v=\left(\dfrac{1}{\|z\|}\right)z$，那么，由于$\|y\|+\|z\|=\|x\|=1$，得到

$$x=\|y\|u+(1-\|y\|)v,$$

所以 $x\notin E$.

兹证对任意 $x=\{x_n\}\in B(l)$，均有 $x\in\overline{\mathrm{co}}(E)$. 对每个 n，令 $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k$，则 $y_n\in\mathrm{co}(E)$. 要看出这一点，考虑空间 l_n 中的点$(x_1,\cdots,x_n)$（l_n 是具有范数$\|(x_1,\cdots,x_n)\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$的 $\mathbf{R}^n$）. 设 $E_n=\mathrm{ext}B(l_n)$，则 E_n 的成员是 n 维向量$\pm e_k$，从而有 $B(l_n)=\mathrm{co}(E_n)$. 因而$(x_1,\cdots,x_n)\subset\mathrm{co}(E_n)$，故 $y_n\in\mathrm{co}(E)$. 由于 $x=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，我们得到了所要求的结果.

注　对任意非空集 Γ，也有 $B(l(\Gamma))=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}B(l(\Gamma)))$，即 $l(\Gamma)$具有 KMP.

可以证明，若 Banach 空间 X 具有 RNP（其定义可参看第八章），则 X 亦必具有 KMP. 至于逆命题是否成立，这是尚未解决的一个问题.

47. 存在某个 Banach 空间中的紧凸集，它不是其端点集的凸包.

容易证明，有限维拓扑线性空间中每个紧凸集必是其端点集的凸包，而且这个凸包还是闭的. 对于无穷维拓扑线性空间甚至 Banach 空间，这一命题并不成立. 例如，在 Banach 空间 l 内取子集 A，它是 $\left\{\frac{e_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{0\}$ 的并集的闭凸包，则 A 为一紧凸集. 但 A 并不等于其端点集的凸包.

48. 存在不自反的 Banach 空间，它的单位闭球的端点不可数.

我们有著名的 Lindenstrauss-Phelps 定理：若 X 是无穷维自反 Banach 空间，A 是有界闭凸集，且 $\mathring{A}\neq\varnothing$，则 $\mathrm{ext}A$ 是不可数的(参看[16]，pp.193—195). 应当注意，这个命题之逆不真. 例如，Banach 空间 l^∞ 的单位闭球的端点不可数，但 l^∞ 并不自反.

注 可以证明，Banach 空间 c_0 的共轭空间 l 中的单位闭球有可数个端点(参看例 46). 又，空间 l 中点列的强、弱收敛性是等价的(参看第四章例 2). 于是便产生问题：是否存在 Banach 空间 X，使 X^* 中的单位闭球的端点集是可数的，而且 X^* 中点列的强、弱收敛性不等价？针对这一问题，Tokarev[313] 构造了一个 Banach 空间 X，使 X^* 的单位闭球的端点集是可数的，且 X^* 中点列的弱收敛不蕴涵强收敛.

一个实无穷维 Banach 空间称为 Lindenstrauss-Phelps 空间，简称为 LP 空间，如果 $\mathrm{ext}B(X^*)$ 是可数的.

由例 46 可知，实 Banach 空间 c_0 是 LP 空间. 于是便产生问题：设 X 是 Banach 空间，若 X^* 可分且 X 的每个无穷维子空间均含一个线性子空间，使它线性同胚于 c_0，则 X 是否必线性同胚于 LP 空间？

第三章 算子和泛函

引言

在这一章里，需要将第二章中的某些定义加以扩充，或引进一些新的定义.

设 X,Y 都是赋范线性空间，如果 $T_n, T\in L(X,Y)$，而且 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 T，或称为一致收敛于 T. 如果对每一 $x\in X$，都有 $\|T_nx-Tx\|\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，记作 $T_n\xrightarrow{强}T$，或 $T=(强)\lim\limits_{n\to\infty}T_n$. 如果对每一 $x\in X$，以及任何 $f\in X^*$，都有 $f(T_nx)\to f(Tx)$，则称 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T，记作 $T_n\xrightarrow{弱}T$，或 $T=(弱)\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

容易证明，一致收敛强于强收敛；强收敛强于弱收敛.

设 X,Y 都是赋范线性空间，如果存在一个从 X 到 Y 上的一对一的映射 T，使 T 及 T^{-1} 都是连续的，则称 X 与 Y 拓扑同胚，简称同胚. 如果 T 还是一个线性算子，则称 X 与 Y 拓扑同构或线性同胚. 如果对每个 $x\in X$，还有 $\|Tx\|=\|x\|$，则称 X 与 Y 等距同构.

设 X,Y,Z 都是赋范线性空间，$T_1\in L(X,Y)$，$T_2\in L(Y,Z)$，我们规定 T_1 与 T_2 的乘积 T_2T_1 于下：

$$(T_2T_1)x=T_2(T_1x)\quad (x\in X).$$

容易证明，T_2T_1 是定义在 X 上而在 Z 中取值的有界线性算子.

有界线性算子的乘法具有下列性质：

(i) $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$；$(\alpha T_2)T_1=\alpha(T_2T_1)$；$T_2(\alpha T_1)=\alpha(T_2T_1)$，这里 $T_1\in L(X,Y)$，$T_2\in L(Y,Z)$，$T_3\in L(Z,W)$，W 也是赋范线性空间.

(ii) $T_3(T_1+T_2)=T_3T_1+T_3T_2$，这里 $T_1, T_2\in L(X,Y)$，$T_3\in L(Y,Z)$；$(T_2+T_3)T_1=T_2T_1+T_3T_1$，这里 $T_1\in L(X,Y)$，

$T_2, T_3 \in L(Y, Z)$.

(iii) $\|T_2T_1\| \leqslant \|T_2\|\|T_1\|$，这里 $T_1 \in L(X, Y)$，$T_2 \in L(Y, Z)$.

若$T_1, T_2 \in L(X)$，此时，T_1T_2与T_2T_1都有意义，但一般$T_1T_2 \neq T_2T_1$. 如果$T_1T_2 = T_2T_1$，则称T_1与T_2可换. 又若$T \in L(X)$，我们用T^2记TT，一般地，可以定义$T^n(n \geqslant 1)$.

关于算子的相乘，可以推广到一般的情况. 设T_1是定义在X中而值域包含在Y中的线性算子，T_2是定义在Y中而值域包含在Z中的线性算子，我们考察T_1的定义域$D(T_1)$中的元素x，它使T_1x属于T_2的定义域$D(T_2)$，记这种元素x的全体为D，显然D是X的一个子空间. 我们规定T_2T_1于下：对$x \in D$，令

$$(T_2T_1)x = T_2(T_1x),$$

于是T_2T_1是定义在$D \subset X$上而值域包含在Z中的线性算子.

设X, Y都是赋范线性空间，X^*, Y^*分别是它们的共轭空间，而$T: X \to Y$是有界线性算子，那么就存在唯一线性算子$T^*: Y^* \to X^*$，使得对于所有的$x \in X$，$f \in Y^*$，有

$$f(Tx) = (T^*f)(x).$$

这个算子T^*称为T的共轭算子或伴随算子.

共轭算子具有下列性质：

(i) T的共轭算子T^*是有界线性算子，且$\|T^*\| = \|T\|$.

(ii) $(\alpha T)^* = \alpha T^*$，这里$\alpha$为数.

(iii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$，这里$T_1, T_2 \in L(X, Y)$.

(iv) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$，这里$T_1 \in L(X, Y)$，$T_2 \in L(Y, Z)$，Z也是赋范线性空间.

(v) 设$T \in L(X, Y)$有有界的逆算子，则T^*也有有界的逆算子，且$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(vi) T的共轭算子T^*也有共轭算子$(T^*)^*$，简记为T^{**}，则$\|T^{**}\| = \|T\|$. 若将X看成X^{**}的子空间，则T^{**}是T的延拓.

除了有界线性算子的共轭算子外，我们还可引入更一般的线性算子的共轭算子概念.

设 X,Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的线性算子，如果 T 的定义域 $D(T)$ 在 X 中稠密，则称 T 是 X 到 Y 的稠定线性算子.

我们视 $f(x)$ 为 x,f 的二元函数，并引入形式写法 $\langle x,f\rangle=f(x)$.

设 X,Y 都是赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的稠定线性算子，令 $D(T^*)$ 是 Y^* 中能找到 $x^*\in X^*$，使

$$\langle Tx,y^*\rangle=\langle x,x^*\rangle,x\in D(T)$$

成立的 y^* 全体. 称 $D(T^*)\subset Y^*$ 到 X^* 的算子 $T^*:y^*\to x^*$ 为 T 的共轭算子或伴随算子.

显然，T 与 T^* 的关系是

$$\langle Tx,y^*\rangle=\langle x,T^*y^*\rangle,x\in D(T),y^*\in D(T^*).$$

设 X,Y 都是赋范线性空间，$X\times Y$ 是 X 与 Y 的乘积，并在 $X\times Y$ 上取范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|.$$

映射 $y=Tx(x\in D,y\in Y)$ 的图象 $G(T)$ 是集合 $\{(x,Tx):x\in D\}\subset X\times Y$，其中 D 是 T 的定义域. 如果映射 T 的图象是 $X\times Y$ 的一个闭子集，则称 T 为闭映射. 换句话说，一个映射 T 是闭的，如果由 $x_n\to x_0,\{x_n\}\subset D$ 和 $y_n=Tx_n\to y_0$，总能推出 $x_0\in D,y_0=Tx_0$.

线性空间 X 的子空间 M 称为有限余维的，如果 M 在 X 中具有一个维数有限的余子空间. 所述维数不依赖于余子空间的选择，并称之为 M 在 X 中的余维数，记为 $\operatorname{codim}M$ 或 $\operatorname{codim}_X M$. 如果 M 没有有限维余子空间，则 M 称为在 X 中是无穷余维的.

设 X,Y 都是线性空间，$T:X\to Y$ 是线性算子. $T(X)$ 的维数称为 T 的秩，记为 $\operatorname{rank}(T)$. 若 $T(X)$ 是无穷维的，则称 T 是无限秩的.

线性空间 X 中余维数为 1 的子空间称为 X 的超平面.

设 f 是线性空间 X 上的线性泛函，则核 $H=f^{-1}(0)$ 就是 X 中的超平面．关系式 $f(x)=0$ 称为 H 的方程．超平面是 X 的最大的子空间，即 X 中包含超平面 H 的任一线性子空间或者是 H 或者是 X 本身．

显然，如果 f 是赋范线性空间 X 上的有界线性泛函，则 $H=f^{-1}(0)$ 是 X 的闭子空间，其逆亦真．

1．连续而无界的泛函．

设 $x=\{\xi_k\}\in E^\infty$，在 E^∞ 上取范数 $\|x\|=\sup\limits_k|\xi_k|$，则 $(E^\infty,\|\cdot\|)$ 为一赋范线性空间．令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^k,$$

易见，f 是 E^∞ 上的连续泛函．但 f 不是有界的，因为若取 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)\in E^\infty$，其中 $\xi_k=1,1\leqslant k\leqslant n$，则 $\|x\|=1$ 且

$$|f(x)|=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^k=n.$$

由于 n 是任意正整数，因而 f 不是有界的．

注　如果 f 是定义在赋范线性空间上的线性泛函，那么 f 为连续的充要条件是它为有界的．上述反例说明了在这个命题中 f 为线性的条件不可去掉．

2．下半连续而不连续的泛函．

定义在赋范线性空间上的实值泛函 f 称为下半连续的，是指对任意实数 a，$\{x:f(x)\leqslant a\}$ 是闭集．如果 $-f$ 是下半连续的，就称 f 是上半连续的．

下半连续的线性泛函必定是连续的（参看[326]，p.83）．然而，下半连续的泛函不必是连续的．例如，在线性空间 E^∞ 上取范数 $\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$，其中 $\{\xi_n\}\in E^\infty$．令

$$f(x)=\sum_n|\xi_n|,$$

则 f 是 E^∞ 上的泛函. 对任意实数 a, $\{x=\{\xi_n\}\in E^\infty: \sum_n |\xi_n|\leqslant a\}$ 显然是闭集，故 f 是下半连续的.

兹证 f 不连续. 为此，取 $x_n=\left(0,\cdots,0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{2n},0,\cdots\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=+\infty,$$

故 f 在 $x=0$ 不连续.

3. 存在某个复赋范线性空间上的可加连续算子，它不满足复齐性的条件.

设 X,Y 均为赋范线性空间，算子 $T:X\to Y$ 称为可加的，是指 $T(x+y)=Tx+Ty$，T 称为齐性的，是指 $T(\alpha x)=\alpha Tx$.

容易证明，若 T 是由 X 到 Y 内的可加算子，那么，如果 T 是连续的，则其必是实齐性的，即对实数是齐性的（参看[14]，p.72）. 应当注意，对于复赋范线性空间而言，从可加算子的连续性未必能推出它是复齐性的，即对复数是齐性的. 例如，设 $C[0,1]$ 是复 Banach 空间，$T:C[0,1]\to C[0,1]$定义为

$$Tx=\overline{x(t)}.$$

易见，T 可加且连续. 然而，容易验证 T 并不满足复齐性的条件.

4. l^∞ 上的一个有界线性泛函 f，不能表成 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n$ 的形式，其中 $x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，而 $\{\beta_n\}$ 为某个固定数列.

在实 Banach 空间 c 上定义泛函

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\xi_n,\ x=\{\xi_n\}\in c.$$

由 Hahn-Banach 定理，可把 f 扩张到空间 l^∞ 上，扩张后的泛函仍记作 f，它适合 $|f(x)|\leqslant\|x\|_{l^\infty}$. 兹证 f 不能表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n$$

的形式，其中 $x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，$\{\beta_n\}$ 为某个固定的数列. 事实上，令 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则据 f 的定义，有 $f(e_n)=0$. 另一方面，$f(e_n)=\beta_n$，因而得到 $\beta_n=0, n=1,2,\cdots$. 这说明了对任意 $x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，都有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n=0.$$

但这并不成立，因为对 $e=(1,1,\cdots)\in l^\infty$ 而言，有 $f(e)=1$.

注 Banach 空间 l 上的有界线性泛函 f 可表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n$$

的形式，其中 $x=\{\xi_n\}\in l$，$\{\alpha_n\}\in l^\infty$（参看[11]，pp.111—112）. 上述反例说明了对于 Banach 空间 l^∞ 上的有界线性泛函 f 未必可表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\xi_n$$

的形式，其中 $x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，$\{\beta_n\}$为某个数列.

5. 存在某个赋范线性空间的子空间上的有界线性泛函，其保范扩张并不唯一.

考察一切二维向量 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 按照范数 $\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$ 所成的 Banach 空间 X. 令 G 为 X 中形如 $(\xi_1,0)$ 的向量组成的子空间. 在 G 上定义有界线性泛函 f：

$$f(x)=\xi_1(x\in G).$$

显然，$\|f\|_G=1$. 任取满足$|\alpha|\leqslant 1$的数α，再定义X上的有界线性泛函F_α：

$$F_\alpha(x)=\xi_1+\alpha\xi_2, x=(\xi_1,\xi_2)\in X.$$

易见，F_α是f的扩张，且$\|F_\alpha\|\geqslant 1$. 又因

$$|F_\alpha(x)|\leqslant|\xi_1|+|\alpha|\cdot|\xi_2|\leqslant|\xi_1|+|\xi_2|=\|x\|,$$

故$\|F_\alpha\|\leqslant 1$，于是$\|F_\alpha\|=1$. 因此，F_α是f的扩张且满足$\|F_\alpha\|=\|f\|_G$. 但是全部$F_\alpha(|\alpha|\leqslant 1)$构成之集具有连续统的势$\aleph$.

注　这个例子说明了满足 Hahn-Banach 定理中的两个条件的泛函的扩张不必是唯一的.

Taylor[307]曾证明：如果赋范线性空间X的共轭空间X^*中的单位球是严格凸的，即$\|x_1\|=\|x_2\|=1, x_1\neq x_2$, $0<\lambda<1$蕴涵$\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|<1$，那么$X$的任意闭线性子空间$M$上的任意有界线性泛函必可唯一保范地扩张成全空间$X$上的有界线性泛函. 反之，如果$X$是自反空间，那么$X^*$中单位球严格凸也是上述唯一扩张的必要条件.

Канторович[161] 于1935年考虑了下述问题：是否可以把Banach 空间X的闭线性子空间M上的一切有界线性泛函φ扩张成X上的有界线性泛函f，使这扩张是保范的，并且$\varphi\to f$是由M^*到X^*中的线性算子？Канторович找出充分必要条件为X是拟凸的，即必须且只须对于X中任意有限多个元素$x_1,\cdots,x_n$及x_0，必存在诸x_i的线性组合

$$\bar{x}_0=\sum_{i=1}^n r_i x_i,$$

使$\|x_i-\bar{x}_0\|\leqslant\|x_i-x_0\|(1\leqslant i\leqslant n)$成立. Kakutani[162]证明：为了Banach 空间X是拟凸的，必须且只须X是内积空间. Канторович的这一问题也曾由 Bohnenblust[51]提出.

类似于 Hahn-Banach 定理，我们要考虑乘积空间上的双线性

泛函的扩张问题.

设X,Y均为线性空间，p，q分别是X,Y上的次可加，正齐性泛函，即对任意$x,y\in X$，有$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，而对任意实数$\alpha\geqslant 0$以及任意$x\in X$，有$p(\alpha x)=\alpha p(x)$. 若$M$，$N$分别是$X,Y$的子空间，$f(x,y)$是$M\times N$上的双线性泛函，即

$$f(\alpha x+\beta y,z)=\alpha f(x,z)+\beta f(y,z),$$

$$f(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha} f(x,y)+\bar{\beta} f(x,z),$$

使$f(x,y)\leqslant p(x)q(y)$，则是否一定存在$X\times Y$上的双线性泛函F，使

$$F(x,y)\leqslant p(x)q(y),$$

且当$(x,y)\in M\times N$时，$F(x,y)=f(x,y)$?

Hayden[129]指出，对于Hilbert空间而言，具有上述性质的双线性泛函F必定存在；对于Banach空间而言，这种泛函未必存在.

6. 存在范数不等于1的射影算子.

设M是赋范线性空间X的闭子空间，P是由X到M上的射影算子，即P是有界线性算子，且$P^2=P$. 容易证明，若X是Hilbert空间，则射影算子的范数必为1（参看[326]，p.194）. 对于一般的Banach空间，这个命题并不成立. 例如，设P是由Banach空间c到c_0上的射影算子，对$e=(1,1,\cdots)\in c$，令$y=Pe$，其中$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in c_0$，并取$x=e-2e_n$，其中$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$. 因$P$是射影算子，故$P^2=P$，从而

$$Px=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n-2,\eta_{n+1},\cdots).$$

于是得到$\|Px\|\geqslant|\eta_n-2|\to 2$，$\|P\|\geqslant 2$.

注 Sobczyk[298]指出，若B是Banach空间l^∞的可分子空间，且B包含c_0，则存在由B到c_0上的范数为2的射影算子.

Mcwilliams[218]指出，若B是l^∞的包含c的可分子空间，则存在由B到c上的范数不超过3的射影算子.

William[338]推广 Sobczyk 定理如下：设X是可分的 Banach 空间，Y是X的闭子空间，若$T_0: Y \to c_0$是范数为λ的有界线性算子，则存在T_0的扩张算子$T: X \to c_0$，T的范数至多为2λ.

许汪涛[3]指出，存在三维 Banach 空间，它到每个二维子空间上均无范数为1的射影算子.

7. Hahn-Banach 定理不能推广到一般的有界线性算子.

考察 Banach 空间c的闭子空间c_0，并在c_0上定义算子f：$f(x)=x\,(x\in c_0)$. 易见，f是由c_0到c_0上的有界线性算子.

现设F是f扩张到整个空间c上的任意一个有界线性算子，则F是由c到c_0上的一个射影算子，且$\|F\|\geqslant 2$（参看例6）. 由于F是f的任意一个扩张，可见对于一般的 Banach 空间，不能把 Hahn-Banach 扩张定理转移到有界线性算子上面.

注　Murray[222]曾提出下述问题（实际上 Banach 已经提到，参看[37]，p.234）：对于 Banach 空间X的一个闭线性子空间G，是否可以把由G到另一个 Banach 空间Y中的每个有界线性算子T_0扩张成由X到Y中的有界线性算子T，即找到由X到Y中的有界线性算子T，当$x\in G$时$Tx=T_0x$，使$\|T\|_X=\|T_0\|_G$，这里

$$\|T\|_X=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}}\|Tx\|_Y,\quad \|T_0\|_G=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in G}}\|T_0x\|_Y.$$

Kakutani[164]于1939年解答了这一问题：为了上述 Murray 问题可解，即由X中任意闭线性子空间G到另一个 Banach 空间Y（也是任意的）中的任意有界线性算子T可以保范地扩张成由X到Y中的有界线性算子，必须且只须X是内积空间. Kakutani 还指出，这一定理等价于下述定理：为了对于 Banach 空间X的每个闭线性子空间G，存在一个由X到G上具有范数为1的射影算子，必须且只须X是内积空间.

Hahn-Banach 定理是关于线性泛函的扩张的；如果把线性泛函换成线性算子，则发生下列问题：Banach 空间E叫做具有扩张

性质，是指对于任意赋范线性空间 X 及 X 的任意线性子空间 M，由 M 到 E 中的每个有界线性算子 T_0 至少有一在 X 上的扩张 T，即至少存在一个由 X 到 E 中的有界线性算子 T，当 $x\in M$ 时 $Tx=T_0x$，使 $\|T\|=\|T_0\|$. Hahn-Banach 定理意味着实数空间 $\mathbf{R}^1$ 具有扩张性质. Nachbin[223]于 1950 年提出了寻求 Banach 空间具有扩张性质的条件，特别得出，为了 E 具有扩张性质，必须且只须对于任意含 E 为其赋范线性子空间的每个赋范线性空间 E_0，必存在一个由 E_0 到 E 上的范数为 1 的射影算子. Kelley[172]于 1952年找出了具有扩张性质的 Banach 空间的更好的特征，即每个具扩张性质的 Banach 空间必等距同构于一个极端断紧的 T_2 空间 Ω（拓扑空间 Ω 称为极端断紧的 T_2 空间，如果 Ω 是一个紧的 Hausdorff 空间、且 Ω 中每个开集的闭包仍是开集）上实值连续函数全体所组成的 Banach 空间 $C(\Omega)$.

8. 存在某个Banach空间上的非零连续线性泛函，它在单位闭球上取不到最大值.

在 Banach 空间 c_0 上定义泛函

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{n!},\ x=\{\xi_n\}\in c_0.$$

可以证明，对任意 $x\in c_0$，$\|x\|\leqslant 1$，均有 $|f(x)|<\|f\|$，其证明方法与第二章例 42相仿，此处从略.

由不等式 $|f(x)|<\|f\|(\|x\|\leqslant 1)$ 可知，$f(x)$ 在单位闭球上取不到最大值.

注 容易证明，自反 Banach 空间 X 上的每个连续线性泛函在 X 的单位闭球上都能取到最大值. 上述反例表明了在这个命题中，自反性的条件不可去掉. 其实，James 于 1957 年证明了下述命题：如果 X 是可分的 Banach 空间，且 X 上的每个连续线性泛函都在 X 的单位闭球上取到最大值，那么 X 必是自反的. 1964 年，James[146]去掉了空间可分性这一限制. 因此，对任何非自反的

Banach 空间X,都存在$f\in X^*$,使f在X的单位闭球上取不到最大值.

9. 存在与某个Banach空间中的单位闭球相切而不相交的闭超平面.

我们用$B[x_0,r]$代表以x_0为球心,r为半径的闭球. 若超平面H满足条件$\rho(x_0,H)=r$,则称超平面H与闭球B相切.

由闭超平面与闭球相切不能推出它们相交. 为说明这一陈述,我们在 Banach 空间c_0上定义连续线性泛函f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{n!},x=\{\xi_n\}\in c_0,$$

则对每一$x\in B[0,1]$,都有$|f(x)|<\|f\|$(参看例 8).令$g=\frac{f}{\|f\|}$,显然,$\|g\|=1$且g在单位闭球上取不到最大值. 由于g是c_0上的连续线性泛函,因而超平面$H=\{x:x\in c_0,g(x)=1\}$是闭的. 兹证闭超平面H与单位闭球$B[0,1]$相切而不相交. 为此,任取ε $(0<\varepsilon<1)$,则存在$x\in c_0$,使$\|x\|=1,|g(x)|>1-\varepsilon$.令$y=\frac{x}{g(x)}$,则$y\in H$且$\|y\|<\frac{1}{(1-\varepsilon)}$. 因$\varepsilon$是任取的,且$\rho(0,y)=\|y\|$,故

$$\rho(0,H)=\inf_{y\in H}\rho(0,y)\leqslant 1.$$

另一方面,因g在单位闭球上取不到最大值,故对任意$z\in c_0$,$\|z\|\leqslant 1$蕴涵$|g(z)|<1$. 因此,$z\notin H$,从而$\rho(0,H)\geqslant 1$. 于是得到$\rho(0,H)=1$,即H与$B[0,1]$相切. 然而,由$\|z\|\leqslant 1$蕴涵$|g(z)|<1$可知H与$B[0,1]$不相交.

10. 任给无穷维赋范线性空间上的非零连续线性泛函f,可构造一个可数有界闭集S,使$f(S)$不闭.

设f是无穷维赋范线性空间X上的非零连续线性泛函. 令

$$N=\{x:x\in X,f(x)=0\},$$

则N是X的一个无穷维的闭线性子空间．于是，在N的单位闭球中存在点列$\{x_n\}$，使$\{x_n\}$ 中不存在收敛子列（参看[14]，pp.69—70）．对于$y\notin N$，$S=\{x_n+\frac{y}{n}:n=1,2,\cdots\}$ 是X中的可数有界闭集，但$f(S)=\left\{\frac{f(y)}{n}:n=1,2,\cdots\right\}$在实数空间$\mathbf{R}^1$中不是闭的．

这个问题是由 Wilansky[325]提出并由 Goldberg[121]解答的．

注 若T是映 Banach 空间X到X内的闭线性算子，且T的零空间$N=\{x:x\in X,Tx=0\}$是X的有限维子空间，则T映有界闭集为闭集的充要条件是T有闭的值域（参看[120]，pp.99—100）．上述例子表明当映射f的零空间不是有限维子空间时，即便f是一个有界线性泛函，相应的命题也并不成立．

11．存在不连续的双线性泛函，它对各个变元分别连续．

设X是一切实一元多项式所成的赋范线性空间，范数为

$$\|p\|=\int_0^1|p(t)|dt,$$

并设
$$B(p,q)=\int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

易见，B是 $X\times X$ 上的双线性泛函．设 $p_n\to p(n\to\infty)$，即

$$\int_0^1 |p_n(t)-p(t)|dt\to 0(n\to\infty),$$

则
$$|B(p_n,q)-B(p,q)|\leqslant\int_0^1|p_n(t)-p(t)|\ |q(t)|dt$$
$$\leqslant M\int_0^1|p_n(t)-p(t)|dt\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以 B 关于变元 p 连续．同理可证，B 关于变元 q 也连续．

取 $p(t)=q(t)=0$，$p_n(t)=q_n(t)=nt^n$，　则

$$|B(p_n,q_n)-B(p,q)|=\int_0^1 n^2t^{3n}dt$$

$$=\frac{n^2}{2n+1}\to\infty(n\to\infty),$$

故 B 不连续.

12. 非仿射的等距映射.

Mazur 和 Ulam[217]曾证明：从一个实赋范线性空间到另一个实赋范线性空间上的等距满射 f 必是仿射变换，即 $x\to f(x)-f(0)$是线性的．我们自然要问：满射的条件能否去掉？

Baker[36]指出，若 X,Y 都是实赋范线性空间，而且 Y 是严格凸的，又 $f:X\to Y$ 适合

$$\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|(x,y\in X),$$

则 f 是一个仿射变换．当 Y 为非严格凸的空间时，f 不必为仿射变换．因此，Mazur-Ulam 定理中满射的条件不能去掉．Baker 的例子如下：

设 Y 是一个非严格凸的实赋范线性空间．若 $a,b\in Y$ 且$\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$，则对任何 $s,t\geqslant 0$，有

$$\|sa+tb\|=s\|a\|+t\|b\|.$$

事实上，不失一般性，可设 $0\leqslant s\leqslant t$，则

$$\|sa+tb\|\leqslant s\|a\|+t\|b\|.$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\|sa+tb\|&=\|t(a+b)-(t-s)a\|\\&\geqslant|t\|a+b\|-(t-s)\|a\||\\&=s\|a\|+t\|b\|.\end{aligned}$$

因此，$\|sa+tb\|=s\|a\|+t\|b\|$.

由于 Y 非严格凸，故可选取 $a,b\in Y$，使 a 与 b 线性无关，且 $\|a\|=\|b\|=1$，$\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$．设 f 是由实数空间 $\mathbf{R}^1$ 到 Y 内的映射：

$$f(x)=\begin{cases}xa, & x\leqslant 1,\\ a+(x-1)b, & x>1.\end{cases}$$

兹证 f 是等距映射，但它不是仿射变换. 事实上，若 $x\leqslant 1, y\leqslant 1$，则

$$\|f(x)-f(y)\|=\|xa-ya\|=|x-y|.$$

若 $x\leqslant 1, y>1$，则

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|&=\|xa-a-(y-1)b\|\\&=\|(1-x)a+(y-1)b\|\\&=|x-y|.\end{aligned}$$

若 $x>1, y\leqslant 1$ 或 $x>1, y>1$，则同理可证

$$\|f(x)-f(y)\|=|x-y|.$$

然而，映射

$$x\to f(x)-f(0)=\begin{cases}ax, & x\leqslant 1,\\ a+(x-1)b, & x>1,\end{cases}$$

显然不是线性的.

13. 存在赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 及映射 f，使 $\|x_1-x_2\|_X=1$ 蕴涵 $\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y=1$，但 f 不是等距映射.

下面的例子是由张仲帆作出的：取 X 为二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$，Y 为 $\mathbf{R}^2$ 上的一切实值有界函数按通常线性运算所成的线性空间，对 $y\in Y$，令

$$\|y\|_Y=\sup_{p\in\mathbf{R}^2}|y(p)|,$$

则 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 为一赋范线性空间. 作由 X 到 Y 内的映射 f：

$$x\in X\to y=f(x)\in Y,$$

$$y(p)=\begin{cases}1, & p=x,\\ 0, & p\neq x.\end{cases}$$

显然，当 $\|x_1-x_2\|_X=1$ 时，有 $x_1\neq x_2$，从而

$$(f(x_1)-f(x_2))(p)=\begin{cases}1, & p=x_1,\\ -1, & p=x_2,\\ 0, & p\neq x_1, p\neq x_2.\end{cases}$$

因此，$\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y=1$. 但 f 不是等距映射，因为若令 $x_1=(0,0)$, $x_2=(2,0)\in \mathbf{R}^2$, 则 $\|x_1-x_2\|_X=2$, 而 $\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y=1$.

注 上述反例说明了在等距映射的定义中不能用 $\|x_1-x_2\|_X=1$ 蕴涵 $\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y=1$ 替代 $\|x_1-x_2\|_X=\|f(x_1)-f(x_2)\|_Y$.

14. 等距齐性而非线性的映射.

设 X,Y 均为赋范线性空间，$T:X\to Y$ 叫做等距齐性映射，如果对任意 $x,y\in X$ 及数 α，有

$$\|Tx-Ty\|=\|x-y\|,$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx.$$

Chernoff 和 Waterhouse[67]提出问题：此时 T 是否必为线性的？Marsden[214]指出，若赋范线性空间 Y 是二维的、或是严格凸的，或 T 是满射的，则 T 必为线性映射. 对于一般情形，T 不必是线性映射. 下面的例子是由 Araker[29]作出的.

定义 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^1$ 内的映射 f 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}y, 0\leqslant y\leqslant x \text{ 或 } x\leqslant y\leqslant 0,\\ x, 0\leqslant x\leqslant y \text{ 或 } y\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

不难看出：(i) f 是非线性的. (ii) f 是齐性的，即 $f(tx,ty)=tf(x,y)$. (iii) 对任意 $x,y,u,v\in\mathbf{R}^1$，有

$$|f(x,y)-f(u,v)|\leqslant\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}.$$

设 $X=\mathbf{R}^2$ 并在 X 上取通常范数，$Y=\mathbf{R}^3$ 并在 Y 上取范数

$$\|(x,y,z)\|=\max\{\sqrt{x^2+y^2},|z|\},$$

则 Y 为一赋范线性空间. 定义 X 到 Y 内的映射 T 如下：

$$T(x,y)=(x,y,f(x,y)).$$

由(i),(ii),(iii)可知,T 等距齐性而非线性.

15. 不可换的连续线性算子.

对 $x\in L^2[0,1]$,令 $Ax(t)=tx(t)$,

$$Bx(t)=\int_0^1 tsx(s)ds.$$

易见,A 与 B 都是由 $L^2[0,1]$到 $L^2[0,1]$的连续线性算子,且

$$ABx(t)=t^2\int_0^1 sx(s)ds,$$

$$BAx(t)=t\int_0^1 s^2x(s)ds.$$

因此,$AB\neq BA$.

16. 存在某个赋范线性空间到其自身上的一对一的不连续的线性算子.

在线性空间 l 上取范数$\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$,其中 $x=\{\xi_n\}\in l$. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n,$$

则 f 是赋范线性空间 l 上的不连续的线性泛函(参看第二章例27). 取 $a=(1,-1,0,0,\cdots)$,则 $\|a\|=1$ 且 $f(a)=0$. 对每一 $x\in l$,令

$$g(x)=x-af(x).$$

显然,g 是由 l 到 l 的线性算子. 注意,由 $g(x)=0$ 可以得到 $x=af(x)$. 于是,再由 $f(a)=0$ 得到 $f(x)=f(a)f(x)=0$,从而 $x=af(x)=0$. 这说明了算子 g 是一对一的. 又因为

$$\begin{aligned}g[x+af(x)]&=x+af(x)-af[x+af(x)]\\&=x,\end{aligned}$$

所以 g 的值域 $R(g)=l$,即 g 是一个由 l 到 l 上的满射. 为证 g 不连续,我们令

$$g_1(x)=x-g(x)-af(x).$$

如果 g 连续，那么 g_1 也应该连续. 然而，由于线性泛函 f 不连续，因而它在点 $x=0$ 也不连续. 于是，存在 $\varepsilon_0>0$ 及点列 $\{x_n\}\subset l$，使 $x_n\to 0$ 而 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0>0$. 由此可知数列 $\left\{\frac{1}{f(x_n)}\right\}$ 是有界的. 又据反证法的假设，g_1 是连续的，故 $g_1(x_n)\to 0(n\to\infty)$. 而 $\left\{\frac{1}{f(x_n)}\right\}$ 是有界数列，故

$$\frac{g_1(x_n)}{f(x_n)}\to 0(n\to\infty).$$

但是，$\frac{g_1(x_n)}{f(x_n)}=a$，此为矛盾. 因此，$g$ 并不连续.

注 由赋范线性空间 X 到其自身上的恒等算子是一对一的连续线性算子. 上述反例说明了对于一对一的非恒等的线性双射，则不必是连续的.

17. 存在某个赋范线性空间到其自身上的不连续线性算子 f，使 $\{x:f(x)=0\}$ 是闭集.

可以证明，若 f 是拓扑线性空间 X 上的线性泛函，则 f 为连续的充要条件是 $\{x:f(x)=0\}$ 为闭集 (参看[326]，p.186). 应当注意，对于一般的线性算子，这个命题并不成立. 例如，设 X 为线性空间 l，并在 X 上取范数 $\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$，其中 $x=\{\xi_n\}\in X$，又设 f 是 X 到 X 上的一对一的不连续的线性算子 (参看例 16). 于是，$\{x:f(x)=0\}=\{0\}$，它是一个闭集.

注 容易证明，若 f 是连续线性算子，则 f 的零空间 $\{x:f(x)=0\}$ 必为闭集. 上述反例还说明了这个命题之逆并不成立.

18. 一个有界线性算子，其逆算子无界.

设 $X=Y=C[0,1]$，$Tx(t)=\int_0^t x(s)ds\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，则 T 是由 X 到 Y 内的有界线性算子. 但逆算子 $T^{-1}y=\frac{d}{dt}y(t)$ 是定义在

$C^1[0,1]\subset Y$ 上的无界线性算子.

19. 一个无界线性算子,其逆算子有界.

设 $X=(l,\|x\|=\sup_n|\xi_n|)$, $Y=(l,\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|)$, 其中 $x=\{\xi_n\}\in l$. 令$Tx=x$,则T是由X到Y上的一对一的线性算子. 其逆算子 T^{-1} 满足不等式

$$\|T^{-1}x\|=\sup_n|\xi_n|\leqslant\|x\|.$$

因此,T^{-1} 是有界的. 另一方面,我们取 $x_n=(1,1,\cdots,1,0,0,\cdots)\in X$,则$\|x_n\|=1$,而$\|Tx_n\|=n$,可见 T 是无界的.

20. 存在某个非同胚的线性算子,使 T^* 是同胚的线性算子.

设 T 是定义在赋范线性空间X上而值域含于赋范线性空间 Y 内的有界线性算子. 如果 T 有有界的逆算子, 那么 T^* 也有有界的逆算子. 因此, 若 T 是同胚映射, 则 T^* 也是同胚映射(参看[14],p.114). 应当注意,这个命题之逆并不成立. 例如, 设 $X=(l,\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|)$, $Y=(l,\|x\|=\sup_n|\xi_n|)$,并令 $Tx=x$,则 T 是由 X到Y上的一对一的线性算子,且

$$\|Tx\|=\sup_n|\xi_n|\leqslant\|x\|,$$

故 T 是一个有界线性算子. 于是,共轭算子 T^* 是由 Y^* 到 X^* 上的有界线性算子. 任取 $f\in Y^*$,对每一 $x\in X$,因 $Tx=x$, 故 $T^*f=f$,即 T^* 是由 Y^* 到 X^* 上的一对一的有界线性算子. 由于 Y^* 与 X^* 均为 Banach 空间, 因而据 Banach 逆算子定理(参看[14], pp.118—121), T^* 有有界的逆算子, 即 T^* 是一个同胚的线性算子. 然而, T 的逆算子 T^{-1} 并不有界(参看例 18), 故 T 不是同胚的线性算子.

21. Banach 逆算子定理不成立的赋范线性空间.

Banach逆算子定理 设T为Banach(或 Fréchet)空间X到第

二纲赋范线性空间Y上的一对一的连续线性算子，那么，T^{-1}也必为一连续线性算子（参看[11]，p. 340）.

应当注意，当赋范线性空间X不完备或Y不是第二纲赋范线性空间时，Banach逆算子定理并不成立.

第一例　空间X不完备的情形.

在线性空间c_0上取两个不等价的完备范数$\|x\|_1$与$\|x\|_2$（参看第二章例10）. 令

$$\|x\|=\|x\|_1+\|x\|_2,$$

则$\|x\|$严格强于$\|x\|_1$，且$X=(c_0,\|\cdot\|)$不完备（参看第二章例14）. 令$Y=(c_0,\|\cdot\|_1)$，对$x\in X$，令$Tx=x$. 易见，T是由X到Y上的一对一的有界线性算子. 因范数$\|\cdot\|$严格强于$\|\cdot\|_1$，故逆算子T^{-1}不连续.

第二例　空间Y不是第二纲的情形.

设$X=\left(l,\ \|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\right)$，$Y=(l,\|x\|=\sup\limits_{n}|\xi_n|)$，则$Y$不是第二纲的赋范线性空间. 令$Tx=x$，则$T$是一个由$X$到$Y$上的一对一的有界线性算子. 但是，逆算子$T^{-1}$并不有界（参看例18）.

22. 存在两个可逆矩阵，其积不可逆.

无穷矩阵A叫做可逆的(reversible)，是指对每个$y\in c$，方程$y=Ax$有唯一解. 换言之，具有元素$a_{ij}(i,j=0,1,2,\cdots)$的无穷矩阵A叫做可逆的，是指对每个收敛数列$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$，存在唯一的数列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$，使

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{in}x_n=y_i,\ i=0,1,2,\cdots.$$

两个可逆矩阵，其积未必可逆. 下面的例子是由Ackermans[22]作出的.

设A为具有元素$a_{ij}=2^{-i}\delta_{ij}(i,j=0,1,2,\cdots)$的对角线矩阵，

这里$\delta_{ij}=1(i=j),\delta_{ij}=0(i\neq j)$. B为具有元素$b_{0j}=2^{-j}$ $(j=0,1,2,\cdots),b_{ij}=\delta_{ij}(i=1,2,\cdots;j=0,1,2,\cdots)$的矩阵. 易见,$A$是可逆的. 又若$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$是收敛数列,则$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}y_n$是收敛级数, 且据$B$的定义,有$x_n=y_n,n=1,2,\cdots$,从而

$$x_0+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}y_n=y_0.$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty}b_{in}x_n=y_i$有唯一解$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,即$B$也是可逆的.

另一方面, $C=AB$具有元素$c_{0j}=2^{-j}(j=0,1,2,\cdots),c_{ij}=2^{-i}\delta_{ij}(i=1,2,\cdots;j=0,1,2,\cdots)$. 因为不存在数列$\{x_n\}$,使

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{in}x_n=1,\quad i=0,1,2,\cdots,$$

故C不是可逆的.

23. 一个具有逆矩阵的无穷矩阵，而它并不可逆.

设
$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0&\cdots\\0&2&1&0&\cdots\\0&0&2&1&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix},$$

则
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&\cdots\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\cdots\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}$$

是A的逆矩阵. 然而,若令$x=\{(-2)^n\}$,则$Ax=0$,可见方程$y=Ax$的解(取$y=0$)并不唯一,故A不是可逆的.

24．一个可逆矩阵，它却不存在左逆矩阵．

容易证明，若A是可逆矩阵，则必存在A的右逆矩阵．然而，它未必存在左逆矩阵．例如，设 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均为数列，A是由等式

$$y_n=x_1+\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k(n=1,2,\cdots)$$

确定的矩阵．于是，$y=Ax$，这里

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdots\\1&0&1&1&\cdots\\1&0&0&1&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}.$$

因为$Ax=0$蕴涵$0=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n-x_2=\sum_{n=1}^{\infty}x_n-x_2-x_3=\cdots$，于是 $x_2=x_3=\cdots=0$，故最后得到 $x_1=0$．因此，A 是一对一的．又对给定的$y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in c$，令

$x_1=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，$x_n=y_{n-1}-y_n$，$n=2,3,\cdots$，则$y=Ax$，因此，$A$是可逆的．然而容易看出，$A$并无左逆矩阵．

注　例23与例24说明了一个无穷矩阵是可逆的与它具有逆矩阵，是两个互不蕴涵的概念．

25．一个开映射，它的逆映射不连续．

设f是由赋范线性空间X到赋范线性空间Y中的映射，如果它的逆映射f^{-1}连续，那么f必为开映射，即f映开集为开集．但是，逆命题并不成立．例如，我们考虑欧氏空间$\mathbf{R}^2$与$\mathbf{R}^1$，并令$f(x,y)=x$，则f是由$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^1$上的一个映射．易见，f是一个开映射．但是，f的逆映射f^{-1}并不连续，因为若取$(x_n,y_n)=\left(1+\frac{1}{n},2\right)$，$(x,y)=(1,1)$，则有$x_n\to x(n\to\infty)$，然而

$$f^{-1}(x_n)=\left(1+\frac{1}{n},2\right)\nrightarrow(1,1)=f^{-1}(x).$$

26. 一个乘积空间中的闭集，其射影不是闭集.

容易证明，乘积空间中开集的射影必为开集. 但是，闭集的射影不必是闭集. 例如，$F=\left\{\left(n,\frac{1}{n}\right): n=1,2,\cdots\right\}$是二维欧氏空间$\mathbf{R}^2=R_x\times R_y$中的闭集，但 F在R_y上的射影$\left\{\frac{1}{n}\right\}$显然不是$R_y$中的闭集.

27. 存在两个闭映射，构成不闭的复合映射.

两个闭映射的复合映射不必是闭映射. 例如，设

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

$$z=g(y)=\frac{1}{1+y^2}.$$

易见，f与g都是由$\mathbf{R}^1$到$\mathbf{R}^1$内的闭映射. 但是，复合映射

$$z=g[f(x)]=\begin{cases}\frac{x^2}{(1+x^2)}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

不是闭的，因为$(0,0)$是它的图象的聚点，而$(0,0)$并不属于它的图象.

28. 存在闭映射 $y=f(x)$与连续映射 $z=g(y)$，构成不闭的复合映射$z=g[f(x)]$.

可以证明，连续映射 $y=f(x)$与闭映射 $z=g(y)$必定构成闭的复合映射$z=g[f(x)]$. 事实上，设 $x_n\to x(n\to\infty)$，由于f是连续映射，因而

$$y_n=f(x_n)\to f(x)=y(n\to\infty).$$

如果$g(y_n)\to z$，即$g[f(x_n)]\to z(n\to\infty)$，则因$g$ 是闭的，故有

$$z=g(y)=g[f(x)],$$

即$g[f(x)]$是闭映射.

应当注意，复合的顺序不能颠倒，也就是说，闭映射$f(x)$与连续映射$g(y)$可以构成不闭的复合映射$g[f(x)]$. 例如，设

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

$$z=g(y)=\frac{1}{1+y^2},$$

则f是R^1到R^1内的闭映射，而g是由R^1到R^1内的连续映射，但复合映射

$$z=g[f(x)]=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

不是闭的(参看例27).

29. 存在闭线性算子 T 与连续线性泛函 f，构成不闭的线性泛函 $f\circ T$.

在线性空间E^∞上取范数$\|x\|=\sup\limits_m|\xi_m|$，$x=\{\xi_m\}\in E^\infty$，并令

$$Tx=\left(\xi_1,\xi_1+\xi_2,\cdots,\sum_{k=1}^m\xi_k,\cdots\right).$$

显然，T是由赋范线性空间E^∞到Banach空间c内的线性算子. 任取$x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_m^{(n)},\cdots)\in E^\infty$，$n=1,2,\cdots$，若$x_n\to x=(\xi_1,\cdots,\xi_m,\cdots)$，即

$$\|x_n-x\|=\sup_m|\xi_m^{(n)}-\xi_m|\to 0\ (n\to\infty),\tag{1}$$

且$Tx_n\to y=(\eta_1,\cdots,\eta_m,\cdots)$，即

$$\|Tx_n-y\|=\sup_m\left|\sum_{k=1}^m\xi_k^{(n)}-\eta_m\right|\to 0\ (n\to\infty),\tag{2}$$

则由(1)，(2) 得到 $\eta_m=\sum\limits_{k=1}^m\xi_k$. 也就是说，$Tx=y$，因而 T 是闭算

子. 又对每一$y=\{\eta_m\}\in c$,令

$$f(y)=\lim_{m\to\infty}\eta_m=\eta.$$

易见,f是c上的连续线性泛函.

兹证E^∞上的线性泛函$f\circ T$不是闭的. 事实上,如果$f\circ T$是闭的,那么$f\circ T$将是连续的(参看[326],p. 197).然而$f\circ T$并不连续,因为若取$x=(0,0,\cdots)$,$x_n=\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right)\in E^\infty$,则

$\|x_n-x\|=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$;而$(f\circ T)(x)=0$,且

$Tx_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{(n-1)}{n},1,0,\cdots\right)$,所以$(f\circ T)(x_n)=f(Tx_n)=1$,$n=1,2,\cdots$,从而

$$\lim_{n\to\infty}(f\circ T)(x_n)\neq(f\circ T)(x).$$

注 Olagunju[236]构造了一个Banach空间X和闭线性算子$T:X\to X$以及X上的1秩射影算子P,使PT不是闭算子.

30. 两个闭线性算子的和与积不必是闭线性算子.

第一例 存在两个闭线性算子,其和不是闭线性算子.

设$X=Y=l^\infty$,定义在Banach空间l^∞上的一个泛函$\lim(x)$称为Banach极限,如果它满足下列条件:

(i) $\lim(\alpha x+\beta y)=\alpha\lim(x)-\beta\lim(y)$,

(ii) 如果$\alpha_n=1$,$n=1,2,\cdots$,则$\lim(\{\alpha_n\})=1$,

(iii) 如果$\alpha_n\geqslant 0$,$n=1,2,\cdots$,则$\lim(\{\alpha_n\})\geqslant 0$,

(iv) $\lim(\{\alpha_{n+1}\})=\lim(\{\alpha_n\})$.

可以证明,在Banach空间$(l^\infty)^*$内存在Banach极限(参看[37],p. 34).

设lim是$(l^\infty)^*$内的Banach极限,我们定义$T_1(\{\alpha_n\})=\{\beta_n\}$,其中

$\beta_1=\lim\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right\}$,$\beta_n=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$,$n>1$; $T_2(\{\alpha_n\})=\{\gamma_n\}$,此处

$\gamma_1=0,\gamma_n=-\beta_n,n>1$. 这时

$$D(T_1)=D(T_2)=\left\{\{\alpha_n\}:\{\alpha_n\}\in l^\infty \text{且}\left\{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\right\}\in l^\infty\right\}.$$

容易证明,T_1和T_2都是闭线性算子. 另一方面,我们有

$$(T_1+T_2)(\{\alpha_n\})=\{\delta_n\},$$

$$\delta_1=\lim\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right\},\delta_n=0,n>1.$$

因此,T_1+T_2不是闭的. 其实,T_1+T_2甚至没有闭的扩张(参看例39).

第二例 存在两个闭线性算子,其积不是闭线性算子.

设$X=Y=C[0,1]$,T是映$C^1[0,1]\subset X$到Y内的微分算子:$(Tx)(t)=x'(t)$,则可证T为闭线性算子.事实上,线性是显然的,我们只要证明它是闭的. 为此,设$\{x_n\}\subset C^1[0,1]$,$x_n\to x$,$Tx_n\to y$ $(n\to\infty)$. 因空间$C[0,1]$中点列的收敛性等价于一致收敛,故函数列$\{Tx_n(t)\}$在区间$[0,1]$上一致收敛于$y(t)$,而且$y(t)$是连续函数. 这时从函数列的逐项微分定理可知,$x(t)$亦是连续可微函数,而且$y(t)=x'(t)$,则$x\in C^1[0,1]$,$Tx=y$,可见T是闭的.

又设S是Y到X内的算子,其定义为$Sx(t)=x(0)$,则S也是闭线性算子(参看[14], p. 123).

今取$x_n(t)=\dfrac{e^{-nt}}{n}$,则$\{x_n\}\subset C^1[0,1]\subset X$,且$x_n\to 0(n\to\infty)$,

$STx_n=-1,n=1,2,\cdots$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}STx_n=-1\neq ST0=0,$$

因此,ST不是闭线性算子.

31. 具有闭的值域的非闭线性算子.

具有闭的值域的线性算子不必是闭的. 例如, 设X, Y均为Banach空间,E为X的稠密的真子空间,T是定义在E上而取值为0

的算子，则$R(T)$显然是Y中的闭集．然而，$E\times\{0\}$在$X\times Y$中不闭，所以T不是闭线性算子．

32．把某个闭集映成非闭集的闭线性算子．

闭线性算子不必把闭集映成闭集．例如，对$x=\{\xi_n\}\in l^2$，令$Tx=\left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}$，则$T$是定义在Banach空间$l^2$上而值域包含于$l^2$中的有界线性算子，从而$T$是一个闭线性算子(参看[14]，p.123)．因$T$的值域$R(T)\supset E^\infty$，而$E^\infty$在$l^2$中是稠密的，故$R(T)$在$l^2$中也是稠密的．又，$y=\left\{\frac{1}{n}\right\}\in l^2\setminus R(T)$，可见$R(T)\neq l^2$．因此，$R(T)$不是$l^2$中的闭子集．

33．连续线性算子与闭线性算子互不蕴涵．

第一例　不连续的闭线性算子．

设X与Y都是定义在区间$[0,1]$上的一切实值多项式所成的实线性空间．对$x\in X=Y$，令

$$\|x\|_X=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$
$$\|x\|_Y=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|,$$

则X与Y都是赋范线性空间．设$Tx(t)=x'(t)$，$x\in X$．易见，不存在正常数M，使对一切$x\in X$，都有

$$\|Tx\|_Y=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x''(t)|\leqslant M\|x\|_X.$$

因此，T不连续．另一方面，假定

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_X=0,\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-y\|_Y=0,$$

其中$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，$y\in Y$，则据范数$\|\cdot\|_X$与$\|\cdot\|_Y$的定义，得到

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x(t)|=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n'(t)-y(t)|=0.$$

但对每一正整数n，显然有

$$x_n(t)-x_n(0)=\int_0^t x_n'(s)ds,0\leqslant t\leqslant 1,$$

由此得到 $x(t)-x(0)=\int_0^t y(s)ds$，$0\leqslant t\leqslant 1$．因 $y(t)$连续，故 $Tx(t)=x'(t)=y(t)$，即线性算子 T 是闭的．

第二例　连续而不闭的线性算子．

设 X　Y 是赋范线性空间，M 是 X 的任一稠密的真子空间，T 是由 M 到 Y 内的恒等算子．显然，线性算子 T 连续而不闭．

34．存在某个连续的一对一的闭线性算子，其逆算子是闭的不连续算子．

设 X 与 Y 是例 33 的第一例中的赋范线性空间，I 是 Y 到 X 上的恒等算子．因对任意 $x\in Y$，都有

$$\|Ix\|_X=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$$
$$=\|x\|_Y,$$

故 I 连续．又易见 I 是闭的，且存在逆算子 $I^{-1}:I^{-1}x=x$．由于不存在常数 $M>0$，使对一切 $x\in X$，都有

$$\|I^{-1}x\|_Y=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$$
$$\leqslant M\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|=M\|x\|_X,$$

所以 I^{-1} 不连续．此外，若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_X=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|I^{-1}x_n-y\|_Y=0,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x(t)|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-y(t)|=0.$$

因此，$I^{-1}x=x=y$，即 I^{-1} 是闭线性算子．

35．闭图象定理不成立的赋范线性空间．

闭图象定理　设 T 是由第二纲的赋范线性空间 X 到 Banach 空间 Y 内的线性算子．那么，当 T 是闭算子时，它就是连续线性算子（参看[11]，pp．336—337）．

应当注意，当 X 不是第二纲的赋范线性空间或 Y 不是 Banach 空间时，闭图象定理未必成立．

第一例　X 不是第二纲赋范线性空间的情形．

设 $X=(C^1[0,1],\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|)$，$Y=C[0,1]$，对 $x\in X$，令 $Tx(t)=x'(t)$，则T是由X到Y内的线性算子，且T是闭的(参看例30的第二例)．但T并不连续，因为若取$x_n(t)=\sin n\pi t\in X$，就有

$$\|Tx_n\|=\left\|\frac{d}{dt}\sin n\pi t\right\|=n\pi\to\infty(n\to\infty).$$

第二例　Y不完备的情形．

设X是任一无穷维 Banach 空间，$H=\{h_\alpha\}$是X的一个 Hamel 基．不妨假定H中的元素的范数均为 1．对任一 $x\in X$，x可唯一地表成

$$x=\sum_i a_i h_i,$$

这里 $h_i\in H$，a_i 均为数，且和式中的项数是有限的．我们在X上取另一范数

$$\|x\|_1=\sum_i|a_i|,$$

记此空间为Y．不难证明，空间Y不完备．事实上，设$\{y_n\}$是H中的任一无穷点列，令

$$s_n=\sum_{k=1}^n k^{-2}y_k,$$

容易验证，$\{s_n\}$是Y中的 Cauchy 点列，它在Y中并不收敛．

设T是由X到Y上的恒等算子，则T是闭算子，且因$\|x\|=\left\|\sum\limits_i a_i h_i\right\|\leqslant\sum\limits_i|a_i|=\|x\|_1$，可见$T$有连续的逆算子．然而闭算子$T$并不连续，因为如果$T$连续，则$T$将是由$X$到$Y$上的线性同胚映射，从而$X$与$Y$或者都是完备的，或者都是不完备的，此为矛盾．

注 Banach[37]针对完备的度量线性空间，提出并解决了闭图象定理这个问题．1956 年，Robertson[265]兄弟把它推广到局部凸拓扑线性空间，他们证明了由桶形空间到全完备空间的闭线性算子是连续的．1963 年，吴智泉和范俊清[5]曾进一步研究过这个问题．

又，Cohen[72]指出，存在 $l\times l$ 到 l 上的双线性映射 φ 及 l 的单位向量列$\{z_n\}$，使得若 $z_n=\varphi(x_n,y_n)$，则必有$\|x_n\|\cdot\|y_n\|\geqslant n$．也就是说，对于双线性映射而言，相应的闭图象定理并不成立．

36．一个在第一纲赋范线性空间上定义而在另一个 Banach 空间上取值的闭线性算子，使其也是连续算子．

设 X 为任一无穷维 Banach 空间，H 为 X 的一个 Hamel 基，并设对任一 $h\in H$，均有$\|h\|\leqslant 1$．对任意 $x\in X$，x 可唯一表成

$$x=\sum_k a_k h_k,\quad h_k\in H.$$

令

$$\|x\|_1=\sum_k |a_k|,$$

并设在此范数下的空间为 Y．那么，Y 必为第一纲的赋范线性空间；并且当令 $X\to Y$ 上的恒等算子为 T 时，则 T^{-1} 必为 Y 到 X 上的闭连续算子．

首先，我们验证 T^{-1} 必是 Y 到 X 上的连续算子．事实上，由于对任意 $x\in X$，都有

$$\|Tx\|_1=\|x\|_1=\sum_k |a_k|\geqslant\sum_k\|a_kh_k\|$$

$$\geqslant\left\|\sum_k a_kh_k\right\|=\|x\|,$$

故知 T^{-1} 必是 Y 到 X 上的连续算子(参看[11]，p. 70)，从而 T^{-1} 也是闭算子(参看[11]，pp. 322—323)．

然后，我们验证 Y 是第一纲的．事实上，我们将 X 的 Hamel 基 H 分为任意可数个子集 $\{H_n\}$，使得 $H_n \subset H_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，$H_i \neq H_j(i\neq j)$，$H=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$．那么，对任意正整数 n，span H_n 均具有下列性质：

（i）span H_n 不含内点．事实上，任取 $x_0 \in$ span H_n，当设

$$x_0 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_k h_k$$

时，由其做法可知存在 $h' \in H_{n+1}$，使 $h' \notin$ spanH_n．这样，当取一趋于零的正数列 $\{\varepsilon_m\}$，并设点列

$$y_m = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_k h_k + \varepsilon_m h' (m=1,2,\cdots)$$

时，显然可知 $y_m \notin$ span$H_n(m=1,2,\cdots)$．然而

$$\|y_m - x_0\|_1 = \|\varepsilon_m h'\|_1 = \varepsilon_m \to 0 (m\to\infty).$$

此即知 spanH_n 不含内点．

(ii) spanH_n 是闭集．事实上，如有元 $z_0 \in (\text{span}H_n)'$，且

$$z_0 = \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \cdots + \beta_i h_i.$$

我们只要证明 $\{h_k\}_{k=1}^{i} \subset$ spanH_n．假若相反，即有 $h_1,\cdots,h_{i_0} \notin$ span$H_n(i_0 \leqslant i)$，那么，当设点列 $\{x_m\} \subset$ spanH_n 满足条件

$$x_m \to z_0 (m\to\infty) \tag{1}$$

时，由 Y 上的范数的定义，可得到，如果点 $x_m = \sum\limits_{k=i_0+1}^{i^{(m)}} \xi_k^{(m)} h_k$ $(i^{(m)} \geqslant i)$，则有

$$\|x_m - z_0\| = \sum_{k=1}^{i_0} |\beta_k| + \sum_{k=i_0+1}^{i^{(m)}} |\xi_k^{(m)} - \beta_k|$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{i_0} |\beta_k| \neq 0$$

（这里，我们约定，当 $k>i$ 时 $\beta_k = 0$）．此与(1)式发生矛盾．因此，spanH_n 是闭集．

综合(i),(ii)，我们即知每一个 $\mathrm{span}H_n$ 均是 Y 中的无处稠密集，从而 $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{span}H_n$ 是第一纲的.

注 上述反例说明了算子 T 的定义域 $D(T)$ 为第二纲的赋范线性空间并不是闭图象定理的实质性条件. 即是说，我们的确可以找到一个在第一纲赋范线性空间上定义而在另一个 Banach 空间上取值的闭线性算子，使其也是连续的.

37. 开映射定理不成立的赋范线性空间.

开映射定理 设 T 为 Banach 空间 X 到一第二纲赋范线性空间 Y 上的连续线性算子. 那么，T 必将 X 中的开集映为 Y 中的开集(参看[11]，pp. 339—340).

应当注意，当 X 不是 Banach 空间或 Y 不是第二纲赋范线性空间时，上述定理未必成立.

第一例　空间 X 不完备的情形.

设 Y 为任一无穷维 Banach 空间，$H=\{h_\alpha\}$ 是 Y 的 Hamel 基. 不妨假定 H 中的元素的范数均为 1，对任一 $y\in Y$，y 可唯一表成

$$y=\sum_i a_i h_i.$$

在 Y 上取另一范数 $\|y\|_1=\sum_i|a_i|$，记此空间为 X，则 X 不完备.

设 T 为 X 到 Y 上的恒等算子，则 T 连续而 T^{-1} 不连续（参看例 35 的第二例). 因此，T 并不把 X 中的开集映为 Y 中的开集.

第二例　空间 Y 不是第二纲的情形.

设 $X=(l,\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|)$，$Y=(l,\|x\|=\sup_n|\xi_n|)$，则 Y 不是第二纲的赋范线性空间. 对 $x=\{\xi_n\}\in X$，令 $Tx=x$，则由关系式

$$\|Tx\|_Y = \sup_n |\xi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|x\|_X$$

可知，T 为由 X 到 Y 上的一对一的有界线性算子．但是，逆算子 T^{-1} 并不连续，因而 T 不把每个开集映成开集．

38．一个在 Banach空间上定义而在另一个第一纲赋范线性空间上取值的闭线性算子，使其也是开算子．

由开映射定理可知，从一个 Banach 空间 X 到一第二纲赋范线性空间 Y 上的闭线性算子一定也是开算子．应当注意，当 Y 不是第二纲赋范线性空间时，这一定理未必成立(参看例 37 的第二例)．然而，我们也可以找到一个在 Banach 空间上定义而在另一个第一纲赋范线性空间上取值的闭线性算子，使其也是开算子．例如，设 X，Y 为例 35 的第一例中的空间，T 为由 X 到 Y 上的恒等算子，则 T 为闭线性算子，且逆算子 T^{-1} 也连续，故 T 为开算子．

39．存在两个闭线性算子，其和没有闭的扩张．

设 T_1 与 T_2 是例 30 的第一例中的定义域为 $T_1(D)=T_2(D)$

$=\left\{\{\alpha_m\}:\{\alpha_m\}\in l^\infty，且\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right\}\in l^\infty\right\}$的闭线性算子，则 T_1+T_2 没有闭的扩张．为证明这一断语，我们先要陈述一个命题如下：

命题　设 X 与 Y 均为赋范线性空间，$y=Tx$ 是从 $D(T)\subset X$ 到 Y 内具有图象 $G=\{(x,Tx):x\in D(T)\}$ 的线性算子，则 T 有闭的扩张的充要条件是 $\overline{G}$ 不包含形如 $(0,y)(y\neq 0)$ 的向量．

现在我们取 $x_k=\{\alpha_n^{(k)}\}$，此处，当 $n\leqslant k$ 时 $\alpha_n^{(k)}=\dfrac{1}{k}$，而当 $n>k$ 时 $\alpha_n^{(k)}=0$，则当 $k\to\infty$ 时 $\|x_k\|\to 0$．然而对任意 k，均有

$$(T_1+T_2)(\{\alpha_n^{(k)}\})=\{\delta_n^{(k)}\}=(1,0,0,\cdots).$$

于是，由上述命题可知 T_1+T_2 没有闭的扩张．

40. 线性算子与其共轭算子之间的关系.

设X，Y均为无穷维赋范线性空间，M为X的稠密子空间，T是定义在M上而值域含于Y中的线性算子. 我们称T有逆算子T^{-1}，如果T是由$D(T)$到$R(T)$上的一对一的映射，这里，$D(T)$是T的定义域M，$R(T)$代表T的值域. 对于算子T而言，它有下列可能的分类：

I $R(T)=Y$（记作$T\in I$）.

II $R(T)\neq Y$，但$\overline{R(T)}=Y$（记作$T\in$ II，以下准此）.

III $\overline{R(T)}\neq Y$.

1．T^{-1}存在且有界.

2．T^{-1}存在而无界.

3．T^{-1}不存在.

若$T\in$ II 且$T\in 1$.，则记作$T\in \mathrm{II}_1$. 于是，T就有 9 种可能的分类. 同样，T的共轭算子T^*也有 9 种可能的分类. 因此，(T, T^*)就有 81 种分类. 例如，若$T\in \mathrm{II}_1$，$T^*\in \mathrm{III}_3$，则称$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_1,\mathrm{III}_3)$，…图 1 是关于$(T,T^*)$的 81 种分类法，图中画斜线的小方块是指不论怎样选择空间X，Y及线性算子T，(T,T^*)不可能属于该方块所示的类（参看[308]，[117]）. 有 16 个未画斜线的小方块，意味着可以构造空间X，Y及线性算子T，使(T,T^*)属于所示的类，其中有 3 个小方块标有Y的，是指当Y完备时不论怎样选择空间X及算子T，(T,T^*)不可能属于该小方块所示的类.

为构造空间X，Y及算子T，使(T,T^*)属于所示小方块的类，我们还需要下述定理：

定理 1 若T^*有连续的逆算子，则$R(T^*)$是闭的.

定理 2 $\overline{R(T)}=Y$当且仅当T^*有逆算子.

定理 3 $R(T^*)=X^*$当且仅当T有有界的逆算子.

定理 4 若Y完备且$R(T)=Y$，则T^*有连续的逆算子.

定理 2 和定理 3 属于 Phillips[248]，而定理 1 和定理 4 是由

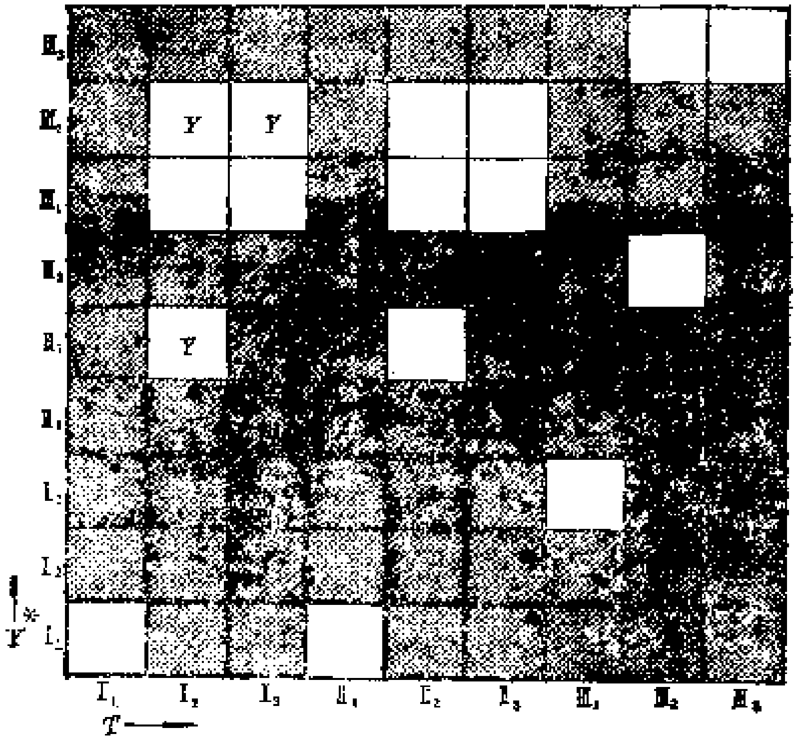


图 J

Goldberg[117]得到的。

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_1)$　设 $Y=X=M=l^2$，T 是由 M 到 Y 上的恒等算子，则 $(T,T^*)\in(\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_1)$。

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_3,\mathrm{III}_1)$　设 $Y=X=M=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in M$，令

$$Tx=(\xi_2,\xi_3,\cdots).$$

显然，$R(T)=Y$ 且 T^{-1} 不存在，故 $T\in\mathrm{I}_3$。又，T 的共轭算子 T^* 为

$$T^*x=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in Y^*=l^2$，因此，$\overline{R(T^*)}\neq X^*=l^2$。显然，$(T^*)^{-1}$ 存在而且连续，故 $T^*\in\mathrm{III}_1$，从而 $(T,T^*)\in(\mathrm{I}_3,\mathrm{III}_1)$。

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_1,\mathrm{I}_3)$　设 $Y=X=M=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in M$，令

$$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则 $$T^*x=(\xi_2,\xi_3,\cdots).$$
因此，$T\in \mathrm{III}_1$，$T^*\in \mathrm{I}_3$，即$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_1,\mathrm{I}_3)$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$　设 $Y=X=M=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in M$，令

$$Tx=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\cdots\right),$$

则因$\left(1,\frac{1}{2},\cdots\right)\in Y\setminus R(T)$，故 $R(T)\neq Y$. 但$\overline{R(T)}=Y$，因而$T\in \mathrm{II}$. 显然，T^{-1}存在且$T^{-1}(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_1,2\xi_2,\cdots)$，因此，$T^{-1}$无界. 此外，有

$$T^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\cdots\right),$$

因而$T^*\in \mathrm{II}_2$. 总之，$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_2)$　设 $Y=X=M=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in M$，令

$$Tx=\left(\xi_2,\ \frac{\xi_3}{2},\ \frac{\xi_4}{3},\cdots\right),$$

则 $$T^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\left(0,\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\cdots\right).$$

显然，$\left(1,\frac{1}{2},\cdots\right)\in Y\setminus R(T)$，故$R(T)\neq Y$，$\overline{R(T)}=Y$. 又，$T$的逆算子$T^{-1}$显然不存在，所以$T\in \mathrm{II}_3$. 其次，$\overline{R(T^*)}\neq X^*=l^2$，且$T^*$是$Y^*$到$R(T^*)$上的一对一的映射，故$(T^*)^{-1}$存在，然而它是无界的. 因此，$T^*\in \mathrm{III}_2$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_2,\mathrm{II}_3)$　设 $Y=X=M=l^2$，并取T为$(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_2)$中的共轭算子，则$T\in \mathrm{III}_2$，$T^*\in \mathrm{II}_3$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_3,\mathrm{III}_3)$　设 $Y=X=M=l^2$，对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in M$，令

$$Tx=\left(0,\frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{2\cdot 3},\ \frac{\xi_4}{3\cdot 4},\cdots\right),$$

则 $$T^*x=\left(0,\frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{2\cdot3},\cdots\right).$$

显然，$\overline{R(T)}\neq Y$，且 T^{-1} 不存在，故 $T\in \text{III}_3$。同理，$T^*\in\text{III}_3$。

$(T,T^*)\in(\text{II}_1,\text{I}_1)$ 设 $X=Y=l^2$，$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，$M$ 是由 $\{e_n\}$ 张成的 X 的线性子空间。显然，M 在 X 中是稠密的。设 T 是由 M 到 Y 中的恒等算子，则 $(T,T^*)\in(\text{II}_1,\text{I}_1)$。

$(T,T^*)\in(\text{II}_2,\text{III}_1)$ 取 (II_1,I_1) 中的空间 X,Y 和子空间 M，并对任一 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)\in M$，令

$$Tx=\left(\sum_{i=1}^{n}i\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,\cdots\right).$$

任取 $f=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in D(T^*)\subset Y^*=l^2$，据 l^2 上有界线性泛函的一般形式，得到

$$|f(Te_k)|=|\alpha_1k+\alpha_k|\geqslant|\alpha_1|k-|\alpha_k|$$
$$\geqslant|\alpha_1|k-\|f\|\ (k>1).$$

因 $\|e_k\|=1$，且 fT 在 M 上连续，k 又是任意的正整数，故 α_1 必须为零。

现在我们来确定算子 T^*。若 $T^*f=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in X^*=l^2$，则由 l^2 上有界线性泛函的一般形式，得到

$$\beta_k=(T^*f)e_k=f(Te_k)=\alpha_k.$$

因此，$T^*f=f$。由于 $\alpha_1=0$，故 $\overline{R(T^*)}\neq X^*=l^2$。于是 $T^*\in\text{III}_1$。

如果 $Tx=0$，则有 $0=\xi_2=\xi_3=\cdots=\xi_n=\xi_1+2\xi_2+\cdots+n\xi_n$，故 $x=0$，从而 T^{-1} 存在。此外，$R(T)\neq Y$。因 T^* 存在逆算子，故据定理 2，$\overline{R(T)}=Y$。又据定理 3，T^{-1} 无界，因而 $T\in\text{II}_2$。

$(T,T^*)\in(\text{I}_2,\text{III}_1)$ 设 $X=l^2$，M 是 (II_1,I_1) 中的 X 的稠密子空间，并取 $Y=M$。对 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)\in M$，令

$$Tx=\left(\sum_{i=1}^{n}i\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,\cdots\right).$$

若 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p,0,\cdots)\in Y$,则取

$$x=\left(\eta_1-\sum_{k=2}^{p}k\eta_k,\eta_2,\cdots,\eta_p,0,\cdots\right)\in M,$$

就有 $Tx=y$,故 $R(T)=Y$,且 T^{-1} 存在. 同 $(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_1)$ 一样,可证 T^{-1} 无界, $\overline{R(T^*)}\neq X^*$, $(T^*)^{-1}$ 有界. 因此, $(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{III}_1)$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_1)$ 取 $(\mathrm{II}_1,\mathrm{I}_1)$ 中的 X, Y 和 M. 对 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)\in M$,令

$$Tx=(2\xi_2,\cdots,n\xi_n,0,\cdots).$$

显然, $T\in\mathrm{II}_3$. 任取 $f=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in D(T^*)$,并令 $T^*f=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^2$,则有 $\beta_1=0$,而

$$\beta_k=(T^*f)e_k=f(Te_k)=f(ke_{k-1})$$
$$=k\alpha_{k-1}(k>1).$$

因此, $\overline{R(T^*)}\neq X^*=l^2$. 此外,由于

$$\|T^*f\|^2=\sum_{k=2}^{\infty}|k\alpha_{k-1}|^2\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2=\|f\|^2,$$

因而 $T^*\in\mathrm{III}_1$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_2)$ 取 $(\mathrm{II}_1,\mathrm{I}_1)$ 中的 X, Y 和 M. 对 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)\in M$,令

$$Tx=\left(\xi_1+\frac{\xi_2}{2}+3\xi_3+\cdots+b_n\xi_n,\ \frac{\xi_2}{2},\ \cdots,\frac{\xi_n}{n},0,\cdots\right),$$

其中 $b_n=\dfrac{1}{n}$, n 为偶数; $b_n=n$, n 为奇数. 显然, T^{-1} 存在. 因为 $\|Te_{2k}\|=\left\|\dfrac{(e_1+e_{2k})}{2k}\right\|=\dfrac{1}{k}$,且 $\|e_{2k}\|=1$,所以 T^{-1} 无界. 此外,若 $y=(\gamma_1,\cdots,\gamma_p,0,\cdots)\in Y$,则取

$$x=\left(\gamma_1-\sum_{i=2}^{p}\gamma_i,2\gamma_2,\cdots,p\gamma_p,0,\cdots\right)\in M,$$

就有 $Tx=y$。这说明了 $R(T)=M$，因而 $T\in \mathrm{II}_2$。取

$$x_k=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k},0,\cdots\right)\in M,$$

则

$$Tx_k=\left(1+\frac{1}{2^2}+1+\cdots+\frac{b_k}{k},\ \frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{k^2},0,\cdots\right).$$

令 $B_k=1+\frac{1}{2^2}+1+\cdots+\frac{b_k}{k}$，显然有 $B_k\to+\infty\ (k\to\infty)$。若取 $f=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in D(T^*)$，则有

$$|f(Tx_k)|=\left|\ \alpha_1 B_k+\sum_{i=2}^{k}\frac{\alpha_i}{i^2}\right|$$

$$\geqslant|\alpha_1|B_k-\sum_{i=2}^{k}\left|\frac{\alpha_i}{i^2}\right|. \tag{1}$$

因为 $\|x_k\|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{i=2}^{\infty}\left|\frac{\alpha_i}{i^2}\right|\leqslant\|f\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，且 fT 在 M 上连续，$B_k\to+\infty$，故由不等式(1) 可得 $\alpha_1=0$。于是，若 $T^*f=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^2$，则有

$$\beta_1=(T^*f)e_1=f(Te_1)=0.$$

因此，$\overline{R(T^*)}\neq Y$，即 $T^*\in \mathrm{III}$。由于 $\overline{R(T)}=Y$，因而据定理 2，T^*存在逆算子$(T^*)^{-1}$。剩下的只要证明$(T^*)^{-1}$无界。为此，取 $f_k=e_k(k>1)$，若 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)$，$\|x\|\leqslant1$，则有

$$|f_k(Tx)|=\left|\frac{\xi_k}{k}\right|\leqslant1.$$

因此，$f_k\in D(T^*)$。由于

$$(T^*f_k)e_i=f_k(Te_i)=\begin{cases}0, & k\neq i,\\ \frac{1}{k}, & k=i,\end{cases}$$

因而$\|T^*f_k\|=\left\|\frac{e_k}{k}\right\|=\frac{1}{k}$，故 $T^*\notin 1$。总之，$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_2)$。

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$ 对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l$，令

$$Tx=\left(0,\frac{\xi_1}{2},\frac{\xi_2}{3},\cdots\right),$$

则 T 是由 $X=l$ 到 $Y=l^2$ 内的有界线性算子. 显然，$T\in\mathrm{III}_2$. 据定理 2，T^* 不存在逆算子；又因为 $\overline{R(T^*)}\neq l^\infty=X^*$，故 $T^*\in\mathrm{III}_3$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{III}_1)$ 设 $H=\{h_\alpha\}$ 是 l^2 的一个Hamel基，不妨假定 $\|h_\alpha\|=1$. 对每一 $x\in l^2$，可唯一表成 $x=\sum\limits_i a_ih_i$. 令

$$\|x\|_1=\sum_i|a_i|,$$

则 $X=(l^2,\|\cdot\|_1)$ 为一不完备的赋范线性空间. 设 $Y=l^2$；T 是由 X 到 Y 上的恒等算子. 显然，T 连续. 然而，T^{-1} 并不连续，因为如果它连续，就将导致不完备赋范线性空间 X 与完备赋范线性空间 Y 线性同胚的谬论. 由此可知，$T\in\mathrm{I}_2$.

因 $R(T)=Y$，故据定理 2 和定理 4，$(T^*)^{-1}$ 存在而且连续. 又据定理 1 和定理 3，$\overline{R(T^*)}\neq X^*$，因而 $T^*\in\mathrm{III}_1$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$ 设 $X=l^2$，对 $x=\{\xi_n\}\in X$，令

$$Tx=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\cdots\right),$$

并令 $Y=R(T)\subset l^2$. 如同$(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$一样，可得 $T\in\mathrm{I}_2$，$T^*\in\mathrm{II}_2$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{III}_2)$ 取 $X=l$，$Y=R(T)\subset l^2$，这里 $x=\{\xi_n\}\in X$，而

$$Tx=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\cdots\right).$$

由$(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$可知，$T\in\mathrm{I}_2$. 由于

$$T^*x=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\cdots\right),$$

$\overline{R(T^*)}=l^2$，$X^*=l^\infty$，因而 $\overline{R(T^*)}\neq X^*$. 又因 $(T^*)^{-1}$ 存在而无界，故 $T^*\in\mathrm{III}_2$.

$(T, T^*) \in (\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_2)$　取$X = l^2$，$Y = R(T) \subset l^2$，这里，$x = \{\xi_n\} \in X$，而

$$Tx = \left(\xi_2, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots\right).$$

于是，T^{-1}不存在，故$T \in \mathrm{I}_3$。因为

$$T^* x = \left(0, \xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots\right),$$

可见$\overline{R(T^*)} \neq X^* = l^2$且$T^*$是由$Y^*$到$R(T^*)$上的一对一的映射，故$(T^*)^{-1}$存在，然而它是无界的，因此$T^* \in \mathrm{III}_2$。

41．有界线性算子与其扩张算子之间的关系．

设X，Y都是赋范线性空间，$L(X, Y)$代表由X到Y中的有界线性算子全体，$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别代表X，Y的完备化空间．于是，对$T \in L(X, Y)$，T有唯一的扩张$\hat{T} \in L(\hat{X}, \hat{Y})$．关于算子$T$和扩张算子$\hat{T}$也有81种分类法．我们先陈述一个定理，它对算子$T$和$\hat{T}$的分类法十分有用．关于这个定理的证明可参看[133]．

定理　设X，Y都是赋范线性空间，$\hat{X}$，$\hat{Y}$分别是X，Y的完备化空间．设$T \in L(X, Y)$，$\hat{T} \in L(\hat{X}, \hat{Y})$是$T$在$\hat{X}$上的唯一连续扩张，则

(a)　$R(T)$在Y中稠密当且仅当$R(\hat{T})$在$\hat{Y}$中稠密．

(b)　T^{-1}存在且连续当且仅当$(\hat{T})^{-1}$存在且连续．

(c)　若T^{-1}不存在，则$(\hat{T})^{-1}$也不存在．

(d)　若$(\hat{T})^{-1}$存在且连续，则$R(\hat{T})$是闭的．

(e)　若$(\hat{T})^{-1}$存在且$R(\hat{T})$是闭的，则$(\hat{T})^{-1}$连续．

图2的小方块中标有字母a，b，c，d或e的，是指对于任何赋范线性空间X，Y和有界线性算子T，$(T, \hat{T})$不可能属于这种小方块所示的类，理由是由定理中有相应字母的断语为依据．例如，$(\mathrm{III}_1, \mathrm{II}_3)$方块中有字母"$a$"，因为定理中的$(a)$证明了$T$不能有性质：$T$的值域在$Y$中不稠密而$\hat{T}$的值域在$\hat{Y}$中稠密．空白的

小方块表明可以适当选择空间 X，Y 及算子 T，就能使 $(T, \hat{T})$ 属于该小方块所示的类.

$\hat{T}$ \ T	I_1	I_2	I_3	II_1	II_2	II_3	III_1	III_2	III_3
III_3	a	a	a	a	a	a	b		
III_2	a	a	a	a	a	a	b		c
III_1	a	a	a	a	a	a		b	b
II_3	b			b			a	a	a
II_2	b		c	b		c	a	a	a
II_1	d	b	b	d	b	b	a	a	a
I_3	b			b			a	a	a
I_2	b	e	c	b	e	c	a	a	a
I_1		b	b		b	b	a	a	a

图 2

图 2 中有 7 个空白小方块，即 $(\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_1)$，$(\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3)$，$(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$，$(\mathrm{II}_3,\mathrm{II}_3)$，$(\mathrm{III}_1,\mathrm{III}_1)$，$(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_2)$ 和 $(\mathrm{III}_3,\mathrm{III}_3)$，在这些小方块中，$T$ 与 $\hat{T}$ 有相同的意义. 因此，我们只要取 X，Y 为任意两个Banach 空间，并使 $T \in L(X, Y)$ 具有所需的性质，那么，由于 $X = \hat{X}$，$Y = \hat{Y}$，$T = \hat{T}$，因而 T 与 $\hat{T}$ 就有同样的性质. 于是，剩下的是要构造 X，Y 和 T，使 $(T, \hat{T})$ 分别属于 $(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$，$(\mathrm{I}_3,\mathrm{II}_3)$，$(\mathrm{II}_1,\mathrm{I}_1)$，$(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_3)$，$(\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3)$，$(\mathrm{II}_2,\mathrm{I}_3)$，$(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$，$(\mathrm{II}_3,\mathrm{I}_3)$ 和 $(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_3)$. 我们现在就来进行这一工作.

$(T,\hat{T}) \in (\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$　设 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 是任意两个 Banach 空间，取 $\hat{T} \in L(\hat{X}, \hat{Y})$，使 $\hat{T} \in \mathrm{II}_2$. 取 $X = \hat{X}$，$Y = R(\hat{T})$，$T = \hat{T}$，则 $T \in L(X, Y)$，$T \in \mathrm{I}_2$. 因此，$(T, \hat{T}) \in (\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$.

$(T,\hat{T}) \in (\mathrm{I}_3,\mathrm{II}_3)$ 设 $\hat{X}$，$\hat{Y}$ 是两个 Banach空间，$\hat{T} \in L(\hat{X},\hat{Y})$，

使 $\hat{T}\in \mathrm{II}_3$. 又设 $X=\hat{X}$, $Y=R(\hat{Y})$, $T=\hat{T}$, 则$T\in L(X,Y)$且 $T\in \mathrm{I}_3$.

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{II}_1,\mathrm{I}_1)$ 任取Banach空间Y,又X是Y的稠密子空间且$X\neq Y$. 令$Tx=x,x\in X$,则$T\in L(X,Y),T\in \mathrm{II}_1$, 而且$\hat{T}$是由$\hat{X}=Y$到$Y$上的恒等算子,所以 $\hat{T}\in \mathrm{I}_1$.

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3)$ 设$X=Y$是c_0的这样的子空间,它的每个元素$x=\{\xi_n\}$中只有有限多个ξ_n不为零. 显然, $\hat{X}=\hat{Y}=c_0$. 对 $x=\{\xi_n\}\in X$, 令 $y=Tx$, 这里 $y=\{\eta_n\}$, 而 $\eta_k=\xi_k-2\,\xi_{k+1}$, $k=1,2,\cdots$.

兹证 $R(\hat{T})=\hat{Y}$. 为此, 我们解关于ξ_{k+1}的方程$\eta_k=\xi_k-2\,\xi_{k+1}$,得到

$$\xi_{k+1}=\frac{\xi_1}{2^k}-\left(\frac{\eta_1}{2^k}+\frac{\eta_2}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{\eta_k}{2}\right). \tag{1}$$

若$\{\eta_n\}\in\hat{Y}$,则对任意$\varepsilon>0$,存在正整数n_0,当$n>n_0$时就有$|\eta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令$M=\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant n_0}|\eta_n|$,则有

$$\begin{aligned}|\xi_{k+1}|&\leqslant\left|\frac{\xi_1}{2^k}\right|+\left|\frac{\eta_1}{2^k}+\frac{\eta_2}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{\eta_{n_0}}{2^{k-n_0+1}}\right|\\&\quad+\left|\frac{\eta_{n_0+1}}{2^{k-n_0}}+\cdots+\frac{\eta_k}{2}\right|\\&<\frac{|\xi_1|}{2^k}+2^{n_0-1}\frac{Mn_0}{2^k}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

取$\xi_1=0$,并取k充分大,使$2^{n_0-1}\frac{Mn_0}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$,则有$|\xi_{k+1}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 于是,我们可以断言:对$\xi_1=0$及$\xi_k(k=1,2,\cdots)$适合(1)式,就有$\{\xi_n\}\in\hat{X}$. 因此,$R(\hat{T})\supset\hat{Y}$.反之,由$T$的定义可知,$R(\hat{T})\subset\hat{Y}$. 于是,$R(\hat{T})=\hat{Y}$.

由(1)式可知,若$\eta_k=0,k=1,2,\cdots$, 则 $\hat{T}x=0$ 当且仅当 $x=\xi_1\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^k},\cdots\right)$,这里$\xi_1$是任意的数. 因此,$(\hat{T})^{-1}$不存

在，即$\hat{T}\in \mathrm{I}_3$。

其次，若$\{\eta_n\}\in Y$，则存在正整数 n_0，当 $k>n_0$ 时，就有 $\eta_k=0$。在(1) 式中令

$$\xi_1=\eta_1+2\eta_2+\cdots+2^{n_0-1}\eta_{n_0},$$

则当 $k>n_0$ 时 $\xi_{k+1}=0$，因此，$\{\xi_n\}\in X$，可见 $R(T)=Y$ 且 T^{-1} 存在. 但由定理的(b)可知，T^{-1}不连续，故$T\in \mathrm{I}_2$。

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{I}_3)$ 取$(\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3)$中的$X$，$T$及$Y=c_0$，则$T\in \mathrm{II}_2$，而 $\hat{T}\in \mathrm{I}_3$。

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$ 取$(\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3)$中的$X$，$T$ 及$Y=l^\infty$，则 $T\in \mathrm{III}_2$，而$\hat{T}\in \mathrm{III}_3$。

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{II}_3,\mathrm{I}_3)$ 设X是l^2的这样的子空间，它的每个元素$x=\{\xi_n\}$中只有有限个 $\xi_n\neq 0$. 令 $Y=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$，令

$$Tx=(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

则 $R(T)\neq Y$，$\overline{R(T)}=Y$且T^{-1}不存在，故 $T\in \mathrm{II}_3$. 又易见 $\hat{T}\in \mathrm{I}_3$。

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_3)$ 取$(\mathrm{II}_3,\mathrm{I}_3)$中的$X$，$Y$，对 $x=\{\xi_n\}\in X$，令$Tx=y=\{\eta_n\}$，这里

$$\eta_k=(2^k-1)\frac{\xi_1}{2^{2k-1}}+2^{1-k}\xi_2+\cdots+2^{1-k}\xi_{k+1},\ k$$

$$=1,2,\cdots.$$

令 $\eta_k=0,k=1,2,\cdots$，则 $\hat{T}x=0$ 蕴涵当 $k\geqslant 2$ 时有 $\xi_k=-2^{1-k}\xi_1$，而 ξ_1 是任意的. 由于 $x=(\xi_1,-2^{-1}\xi_1,\cdots)$ 不在X中而在 $\hat{X}=l^2$ 中，可见 T^{-1}存在而$(\hat{T})^{-1}$不存在.

兹证$\overline{R(T)}=Y$. 为此，令 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，并令

$$x_k=(0,\cdots,0,2^{k-1},2^{k-1},0,\cdots),$$

这里，非零坐标是在第$k+1$ 个及 $k+2$ 个位置上. 易见，$Tx_k=e_k$，$k=1,2,\cdots$，因此，$R(T)$在Y中稠密，从而$R(\hat{T})$在$\hat{Y}=Y$中

也稠密. 取 $\eta_{2k-1}=0$, $\eta_{2k}=2^{1-k}$, $k=1,2,\cdots$, 容易验证, $y=\{\eta_n\}\in\hat{Y}\setminus R(\hat{T})$, 所以$R(\hat{T})\neq\hat{Y}$, 从而 $R(T)\neq Y$. 因此, $(T,\hat{T})\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_3)$.

$(T,\hat{T})\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_3)$　取$(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_3)$中的$X,T$, 并令$Y=R(T)$, 则$T\in\mathrm{I}_2$, 而 $\hat{T}\in\mathrm{II}_3$.

上述线性算子与其扩张算子的分类法是由 Herbert[133] 作出的.

第四章　弱拓扑和弱*拓扑

引言

本章主要涉及赋范线性空间上的弱拓扑和共轭空间上的弱*拓扑方面的例子，也涉及算子空间上的一致拓扑、强拓扑和弱拓扑方面的例子．给出基本定义和性质如下：

设X是数域K上的线性空间，又设(X,τ)是一个拓扑空间，它满足下述条件：(i)(X,τ)是 Hausdorff 空间；(ii)X中的线性运算是连续的：(a)加法运算$(x,y)\to x+y$作为$(X,\tau)\times(X,\tau)\to(X,\tau)$的映射是连续的，(b)数乘运算$(\alpha,x)\to\alpha x$作为$(K,\tau_K)\times(X,\tau)\to(X,\tau)$的映射也是连续的，这里，$\tau_K$表示$K$按照通常距离所引入的拓扑，那么称$(X,\tau)$是拓扑线性空间．

拓扑线性空间，如有零的邻域基底，其每个邻域都是凸的，则称为局部凸的．

设X为拓扑线性空间，$A\subset X$．如果对零点的每个邻域U，恒存在$\lambda>0$，使$A\subset\lambda U$，则称A为有界集．

容易证明，A有界的充要条件是，对任何$\{x_n\}\subset A$，$\lambda_n\to 0$（$\{\lambda_n\}$为数列)，有$\lambda_n x_n\to 0$．也容易证明．对于赋范线性空间的子集而言，这里定义的有界性与原来定义的有界性是一致的．

设X是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$．若对每个$f\in X^*$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$，则称$\{x_n\}$弱收敛于$x$，称$x$是$\{x_n\}$的弱极限，记为

$$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x,(n\to\infty)\text{或 }x=(\text{弱})\lim_{n\to\infty}x_n.$$

共轭空间X^*中的点列$\{f_n\}$称为弱*收敛于$f\in X^*$，是指对任意$x\in X$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，称$f$为$\{f_n\}$的弱*极限，记为

$$f_n\xrightarrow{\text{弱}^*}f(n\to\infty)\text{或 }f=(\text{弱}^*)\lim_{n\to\infty}f_n.$$

设 X 为赋范线性空间，X 中点列$\{x_n\}$的强收敛是由范数决定的距离拓扑 $d(x,y)=\|x-y\|$所界定的收敛。相应于弱收敛，我们如下引入弱拓扑：

设 $x_0\in X$，形如

$$U(x_0,\varepsilon;f_1,\cdots,f_n)$$
$$=\{x\in X:|f_k(x)-f_k(x_0)|<\varepsilon,k=1,2,\cdots,n\}$$

的集合称为 x_0 的一个基本弱邻域，其中 $\varepsilon>0,f_1,\cdots,f_n\in X^*$。由基本弱邻域所界定的拓扑称为$X$上的弱拓扑，记为 $\sigma(X,X^*)$。$\sigma(X,X^*)$ 为X上的一个局部凸的 Hausdorff 线性拓扑，因此，$(X,\sigma(X,X^*))$是一个局部凸的拓扑线性空间。

设 $f_0\in X^*$，形如

$$U(f_0,\varepsilon;x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\{f\in X^*:|f(x_k)-f_0(x_k)|<\varepsilon,k=1,2,\cdots,n\}$$

的集合称为 f_0 的一个基本弱*邻域，其中 $\varepsilon>0,x_1,\cdots,x_n\in X$；由基本弱*邻域所界定的 X^* 上的拓扑称为弱*拓扑，记为 $\sigma(X^*,X)$。$(X^*,\sigma(X^*,X))$也是一个局部凸的拓扑线性空间。

还可以考虑 X^* 上的弱拓扑 $\sigma(X^*,X^{**})$；由于 $X\subset X^{**}$，所以 X^* 上的弱*拓扑弱于 X^* 上的弱拓扑。当 X 是自反的Banach空间时，X^* 上的弱拓扑与弱*拓扑是相同的。X(或 X^*) 中原范数拓扑称为强拓扑，X上的强拓扑强于X上的弱拓扑。

设X,Y是赋范线性空间，$L(X,Y)$是X到Y的有界线性算子的全体。$L(X,Y)$中线性算子列$\{T_n\}$的一致收敛是由算子范数决定的距离拓扑 $d(T_n,T)=\|T_n-T\|$所界定的收敛，这种拓扑通常称为算子一致拓扑。相应于算子列的强收敛和弱收敛，我们引入算子空间$L(X,Y)$上的算子强拓扑和算子弱拓扑如下：

设 $T_0\in L(X,Y)$，形如

$$U(T_0,\varepsilon;x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\{T\in L(X,Y):\|Tx_k-T_0x_k\|<\varepsilon,k=1,2,\cdots,n\}$$

的集合称为 T_0 的一个算子强邻域，其中 $\varepsilon>0,x_1,\cdots,x_n\in X$。

由算子强邻域所界定的拓扑称为$L(X, Y)$上的算子强拓扑. 形如

$$U(T_0,\varepsilon;x_1,\cdots,x_n;f_1,\cdots,f_n)$$
$$=\{T\in L(X,Y):|f_k(Tx_k)-f_k(T_0x_k)|$$
$$<\varepsilon,k=1,2,\cdots,n\}$$

的集合称为T_0的一个算子弱邻域,其中$\varepsilon>0,x_1,\cdots,x_n\in X$, $f_1,\cdots,f_n\in Y^*$. 由算子弱邻域所界定的拓扑称为$L(X,Y)$上的算子弱拓扑.

X中点列$\{x_n\}$弱收敛于x,相当于按拓扑$\sigma(X, X^*)$, $x_n\to x(n\to\infty)$; X^*中泛函列$\{f_n\}$弱*收敛于f,相当于按拓扑$\sigma(X^*,X)$, $f_n\to f(n\to\infty)$; $L(X, Y)$中算子列$\{T_n\}$强收敛于T, 相当于按$L(X,Y)$的算子强拓扑,$T_n\to T(n\to\infty)$; $L(X,Y)$中算子列$\{T_n\}$弱收敛于T,相当于按$L(X,Y)$的算子弱拓扑, $T_n\to T(n\to\infty)$.

由于X上的弱拓扑$\sigma(X,X^*)$和X^*上的弱*拓扑$\sigma(X^*,X)$,以及算子空间$L(X,Y)$上的算子强拓扑和弱拓扑,一般说来不是距离拓扑,所以X中元素列的弱收敛和X^*中泛函列的弱*收敛,以及算子空间中算子列的强、弱收敛,不能分别完全刻划X上的弱拓扑和X^*上的弱*拓扑, 以及算子空间上的算子强拓扑和弱拓扑. 因此,我们还要引入下列概念:

设X,Y均为拓扑线性空间,$f:X\to Y$,称f在$x_0\in X$是序列连续的,是指当$\{x_n\}\subset X, x_n\to x_0$时,$f(x_n)\to f(x_0)$.

显然,若f在$x_0\in X$连续,则f在$x_0\in X$必定序列连续. 当X,Y可度量化时,二者一致.

设X是拓扑线性空间,$A\subset X$,称A是序列闭的, 如果A中每个点列的极限点都属于A.

显然, 闭集必是序列闭的. 当X可度量化时, 二者是一致的.

由于赋范线性空间是度量空间, 所以它在范数拓扑下的完备

性可以用 Cauchy 点列来描述. 而赋范线性空间 X 上的弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$和 X^* 上的弱*拓扑 $\sigma(X^*,X)$一般是不可度量化的. 所以必须研究一般 Cauchy 网的收敛性.

设 X 是 Banach 空间, 如果对 X 中任意一个在弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$下的 Cauchy 网$\{x_\alpha:\alpha\in A\}$(相应地为点列$\{x_n\}$), 恒存在 $x\in X$, 使$\{x_\alpha\}$(相应地为$\{x_n\}$)弱收敛于 x, 则称 X 为弱完备(相应地为弱序列完备)的. 亦即拓扑空间$(X,\sigma(X,X^*))$为完备(相应地为序列完备)的.

容易证明, 为使 Banach 空间 X 是弱序列完备的, 当且仅当对每个 $f\in X^*$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在, 则存在 $x\in X$, 使$\{x_n\}$弱收敛于 x.

类似地, 若拓扑空间$(X^*,\sigma(X^*,X))$为完备(序列完备)的, 则称 X^* 为弱*完备(弱*序列完备)的.

显然, 完备蕴涵序列完备.

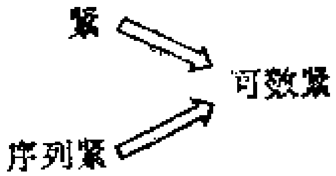
设 X 是赋范线性空间, $(X,\sigma(X,X^*))$称为可分的(即 X 称为弱可分的), 是指$(X,\sigma(X,X^*))$中存在一个可数的稠密子集, 即 X 中存在一个弱稠密的可数子集. X 称为弱序列可分的, 是指 X 中存在一个序列$\{x_n\}$, 使对每一 $x\in X$, x 是$\{x_n\}$的某个子列的弱极限.

同理, 可以在共轭空间中引入弱*可分和弱*序列可分的概念.

设 X 为一拓扑空间, $A\subset X$. (i) A 称为紧的, 是指 A 的每个开覆盖有有限的子覆盖. (ii) A 称为可数紧的, 是指 A 中每个点列$\{x_n\}$, 在 A 中皆有聚点 x. (iii) A 称为序列紧的, 是指 A 中每个点列有一个子列收敛于 A 中一个点.

还有相对序列紧性与相对可数紧性, 例如, A 称为相对可数紧的, 是指 A 中每个点列在 X 中皆有聚点.

这三者的一般关系如下:



当X可度量化时，三者是等价的．但是，对于无穷维赋范线性空间X，一般地，$\sigma(X,X^*)$及$\sigma(X^*,X)$是不可度量化的．然而，关于$\sigma(X,X^*)$，Eberlein-Smulian 定理指出，这三者是等价的．关于X^*上的拓扑$\sigma(X^*,X)$，它们是不同的．

有关拓扑线性空间的更多的材料，可参看[327]．

1．存在某个 Banach 空间上的有界线性泛函列$\{f_n\}$，它弱*收敛于f，而它的任何有限线性组合所成的点列都不按范数收敛于f．

容易证明，若X是 Banach 空间，$\{x_n\}\subset X$，且点列$\{x_n\}$弱收敛于x，则存在有限线性组合$y_m=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$，使点列$\{y_m\}$按范数收敛于$x$．应当注意，对于共轭空间而言，不能把这个命题中泛函列弱收敛的条件减弱为弱*收敛．例如，对实 Banach 空间l中的每一点$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$，令

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k.$$

易见，f_n及f都是l上的有界线性泛函，即$f_n,f\in l^\infty$，且$\{f_n\}$弱*收敛于f．

另一方面，由l上有界线性泛函的一般形式可知

$$f_n=(1,1,\cdots,1,0,0,\cdots),$$
$$f=(1,1,\cdots).$$

显然，$\{f_n\}$的任何有限线性组合所成的点列都不按范数收敛于f．

2. 存在某个无穷维赋范线性空间，其中点列的强、弱收敛性是等价的.

我们知道，赋范线性空间中的强收敛的点列必是弱收敛的，其逆不真.

Schur[279]指出，也确实存在这样的无穷维 Banach 空间，其中点列的强、弱收敛性是等价的. 他指出，序列空间 l 就是这样的空间. 为说明这一事实，只要证明 l 中弱收敛的点列必是强收敛的. 不妨设$\{x_n\}\subset l$ 弱收敛于 0，其中 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$，即对任意 $y=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，都有

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n)}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

要证明$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|\to 0(n\to\infty)$. 反设存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}|\geqslant\varepsilon_0,\ \ k=1,2,\cdots.$$

不妨设上面的不等式对任意的 n_k 都成立.

首先，由 $x_n\in l$ 可知对每个 n 都有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|<+\infty.$$

故对每个 n，都有$\sum\limits_{j=i}^{\infty}|\xi_j^{(n)}|\to 0(i\to\infty)$.

其次，因 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}(n=1,2,\cdots)$弱收敛于 0，故若取

$$y=(a_1,a_2,\cdots)=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\in l^{\infty},$$

其中 1 在第 j 个位置上，则对每个 j 都有

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n)}=\xi_j^{(n)}\to 0(n\to\infty).$$

由此可知，若取定 i_1，必存在 n_1 使

$$\sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

由$(\xi_1^{(n_1)},\xi_2^{(n_1)},\cdots,\xi_i^{(n_1)},\cdots)\in l$,存在$i_2>i_1$使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

因此,

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2}|\xi_i^{(n_1)}|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n_1)}|-\sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_1)}|-\sum_{i=i_2+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_1)}|$$

$$>\frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

对i_2,存在$n_2>n_1$使$\sum\limits_{i=1}^{i_2}|\xi_i^{(n_2)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}$. 而由

$x_{n_2}=(\xi_1^{(n_2)},\xi_2^{(n_2)},\cdots)\in l$,存在$i_3>i_2$使

$$\sum_{i=i_3+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_2)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

因而
$$\sum_{i=i_2+1}^{i_3}|\xi_i^{(n_2)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

由归纳法可知对任何$i_k>i_{k-1}$,存在$n_k>n_{k-1}$使

$$\sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

再由$x_{n_k}=(\xi_1^{(n_k)},\xi_2^{(n_k)},\cdots,\xi_i^{(n_k)},\cdots)\in l$,存在$i_{k+1}>i_k$使

$$\sum_{i=i_{k+1}}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

如此继续下去,得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$,其中$x_{n_k}=(\xi_1^{(n_k)},\xi_2^{(n_k)},\cdots,\xi_i^{(n_k)},\cdots)$,以及标号序列$\{i_k\}$与$\{n_k\}$,适合

$$i_k<i_{k+1},n_k<n_{k+1},\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},\quad \sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\xi_i^{(n_k)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

令
$$a_i=\begin{cases}\operatorname{sgn}\xi_i^{(n_1)}, & i_1\leqslant i\leqslant i_2,\\ \operatorname{sgn}\xi_i^{(n_k)}, & i_k<i\leqslant i_{k+1}, k=2,3,\cdots.\end{cases}$$

则$(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)\in l^\infty$,且对任何 k 都有

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n_k)}=\sum_{i=1}^{i_k}a_i\xi_i^{(n_k)}+\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}a_i\xi_i^{(n_k)}+\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n_k)}$$

$$\geqslant-\sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}|+\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\xi_i^{(n_k)}|-\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}|$$

$$>\frac{\varepsilon_0}{5}.$$

这与$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n)}\to0\left(因而\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i^{(n_k)}\to0\right)$相矛盾.

注　容易证明,在有限维赋范线性空间中点列的强、弱收敛性是等价的. 上述反例表明了点列的强、弱收敛性等价并不是赋范线性空间为有限维的特征,这与 Hilbert 空间是不同的.

设 X 是 Banach 空间,若 X 中点列的强、弱收敛性等价,则称 X 为 Schur 空间. 因此,Banach 空间 l 是 Schur 空间.

3. 弱*收敛而不弱收敛的泛函列.

如所周知,若赋范线性空间上的泛函列$\{f_n\}$弱收敛于 f,则其亦必弱*收敛于 f. 应当注意,这个命题之逆并不成立. 例如,取 $X=c_0$,则 $X^*=l$. 再取泛函列

$$f_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\in l, n=1,2,\cdots,$$

那么，从空间 c_0 上有界线性泛函的一般表达式知，对任一 $x=\{\xi_n\}\in c_0$，都有 $f_n(x)=\xi_n\to 0\ (n\to\infty)$，即 $\{f_n\}$ 弱*收敛于0.另一方面，$\{f_n\}$ 显然不强收敛于0，由例2即知 $\{f_n\}$ 也不弱收敛于0.

4. 赋范线性空间中弱收敛而不强收敛的点列.

容易证明，若 X 是一个赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，且 $\{x_n\}$ 强收敛于 x，则其亦必弱收敛于 x. 这个命题之逆并不成立. 例如，在空间 l^2 中取 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，那么，由 $\|e_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$ 可知 $\{e_n\}$ 不强收敛于0. 然而，由空间 l^2 上有界线性泛函的一般形式可知，对任一 $f=\{f_n\}\in(l^2)^*=l^2$，都有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n,\ x=\{\xi_n\}\in l^2.$$

因而可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(e_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$，即 $\{e_n\}$ 弱收敛于0.

5. 存在点列 $\{x_n\}\subset l^2$，使 $\{x_n\}$ 按坐标收敛而并不弱收敛.

容易证明，如果点列 $\{x_n\}\subset l^2$ 弱收敛于 x，那么它亦必按坐标收敛于 x. 应当注意，这个命题之逆并不成立. 例如，取

$$x_n=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{n}},\cdots,\ \frac{1}{\sqrt[4]{n}},0,\cdots\right),$$ 则 $\{x_n\}$ 按坐标收敛于0. 但是，由于 $\|x_n\|=\sqrt[4]{n}$，因而 $\{\|x_n\|\}$ 无界，故 $\{x_n\}$ 不弱收敛.

注 容易证明，在空间 $l^p(p>1)$ 中，为了点列 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 弱收敛于 $x=\{\xi_k\}$，必须且只须其满足

(i) 数列 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的；

(ii) 对于 x_n 的每一个坐标 $\xi_k^{(n)}\ (k=1,2,\cdots)$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k\ (k=1,2,\cdots).$$

由 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性显然推不出 $\{x_n\}$ 按坐标收敛；再由例5可知，上述命题中的条件(i)与(ii)是互相独立的.

6．强收敛而不一致收敛的有界线性算子列．

我们有下述命题：设 X 与 Y 都是赋范线性空间，$\{T_n\}$是 X到 Y 的有界线性算子列．若$\{T_n\}$一致收敛于某个算子，则其亦必强收敛于同一算子．应当注意，这个命题之逆并不成立．例如，考虑 Banach 空间 $l^p(p\geqslant 1)$．对每一 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$，令

$$T_n x=x_n,\ n=1,2,\cdots,$$

这里，$x_n=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$．不难看出，$T_n$ 是 l^p 到 l^p 内的有界线性算子，且$\|T_n\|\leqslant 1$．注意到对每一 $x\in l^p$，有

$$\|T_n x\|=\|x_n\|\to 0\ (n\to\infty),$$

故$\{T_n\}$强收敛于零算子．另一方面，若取 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则$\|e_n\|=1$ 且 $T_n e_n=(1,0,0,\cdots)$，故

$$\|T_n\|\geqslant\|T_n e_n\|=1.$$

因此，$\|T_n\|=1,n=1,2,\cdots$，可见$\{T_n\}$不一致收敛于零算子．

7．弱收敛而不强收敛的有界线性算子列．

容易证明，若由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子列$\{T_n\}$强收敛于算子 T，则它亦必弱收敛于 T．必须指出，这个命题之逆不真．例如，考虑 Banach 空间 l^2．对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$T_n x=(0,\cdots,0,\xi_1,\xi_2,\cdots).$$

显然，T_n 是由l^2 到 l^2 内的有界线性算子．

兹证$\{T_n\}$弱收敛而不强收敛．

首先，l^2 上的有界线性泛函 f 具有下面的形式：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i,$$

其中 $f=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^2$．据 T_n 的定义，得到

$$f(T_n x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\xi_{i-n}\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_{n+k}.$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式，得到

$$|f(T_n x)|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}|\eta_m|^2\right).$$

因为 $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}|\eta_m|^2$ 是收敛级数的余项，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}|\eta_m|^2=0,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}|f(T_n x)|=0.$$
即$\{T_n\}$弱收敛于零算子．但是，$\{T_n\}$并不强收敛，因为若取 $x=(1,0,0,\cdots)$，就有

$$\|T_m x-T_n x\|=\sqrt{2}\,(n\neq m).$$

8．共鸣定理不成立的赋范线性空间．

我们先陈述共鸣定理：设$\{T_\alpha\}(\alpha\in\mathscr{A})$是定义在Banach 空间 X 上，而值域包含在赋范线性空间 Y 中的有界线性算子T_α $(\alpha\in\mathscr{A})$所成之集．若对每个 $x\in X$，有

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha x\|<+\infty,$$

则$\{\|T_\alpha\|\}(\alpha\in\mathscr{A})$有界．

共鸣定理是泛函分析的基本定理之一．应当注意的是在共鸣定理中，空间 X 的完备性的条件一般不可去掉．反例如下：

取 $X=Y=\left(E^\infty,\ \|x\|=\left(\sum\limits_k|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$，则 X 与 Y 都是不完备的赋范线性空间．定义由 X 到 Y 的算子 T_n 如下：

$$T_n x=(0,\cdots,0,n\xi_n,0,\cdots).$$

显然，$T_n(n=1,2,\cdots)$都是有界线性算子，且$\|T_n\|=n$．

任取 $x=\{\xi_k\}\in X$，由于x的坐标在某个正整数 n_0 以后全为零，因而当 $n>n_0$ 时，$\|T_n x\|=n|\xi_n|=0$；而当 $n\leqslant n_0$ 时，$\|T_n x\|=n|\xi_n|\leqslant n_0\|x\|$．因此，对每一 $x\in X$，有

$$\sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$

然而，$\|T_n\| = n \to \infty (n \to \infty)$，所以共鸣定理不成立.

注 上述反例说明了共鸣定理中空间 X 的完备性的条件一般不可去掉. 于是，自然会提出下述问题：如果当我们所涉及的空间并不知道它是完备，或者就是不完备的时候，那么应当在什么样的附加条件下会仍旧使这一有用的定理成立呢？定光桂[8],[9],[10]和罗跃虎[13]对这一问题进行了研究，读者如有兴趣，可参看他们的原文.

由共鸣定理立即可得下列推论：设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$T, T_n \in L(X, Y)$，$n=1,2,\cdots$. 若$\{T_n\}$强收敛于T，则$\{T_n\}$一致有界. 上述反例还表明，在这个推论中空间 X 的完备性的条件不可去掉.

9. 存在某个 Banach 空间 X 到另一赋范线性空间 Y 内的一个一致有界的线性算子列$\{T_n\}$，使对 X 的某个稠密子集 G 的每一点 x，$\{T_n x\}$都收敛，但$\{T_n\}$并不强收敛于某个 $T \in L(X, Y)$.

我们有下述命题：设$\{T_n\}$是由赋范线性空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子列，如果满足下面的条件：

(i) $\{\|T_n\|\}$是有界数列；

(ii) 对于 X 中的某一稠密子集 G 中的每个点 x，$\{T_n x\}$收敛，则$\{T_n\}$强收敛于某一有界线性算子 T，且

$$\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

应当注意，在这个命题中空间 Y 完备的条件不可去掉. 例如，取 $X = l$，$Y = \left(E^\infty, \ \|x\| = \sum_k |\xi_k| \right)$，$G = E^\infty$，则 G 在 X 中稠密. 对每一 $x \in X$，令

$$T_n x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots),$$

则 T_n 是由 X 到 Y 内的有界线性算子，且$\|T_n\| \leqslant 1$，即$\{T_n\}$是一致

有界的.

令 $Tx=x$,则对每一 $x\in G$, $\{T_nx\}$都收敛于 Tx, 但$\{T_n\}$并不强收敛于 $L(X,Y)$中的某个算子.

10. 弱序列完备而不弱完备的赋范线性空间.

在赋范线性空间内,我们都是以 Cauchy 点列来定义其完备性的,其实质在于上述空间均为度量空间,从而满足第一可数公理;因此,完备与序列完备是两个相同的概念. 对于弱拓扑及弱*拓扑,当 X 为无穷维赋范线性空间时, X 在弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$或 X^* 在弱*拓扑 $\sigma(X^*,X)$下均不满足第一可数公理;因此,上述空间 X(或X^*)上就有弱完备与弱序列完备(相应地,或弱*完备与弱*序列完备)两个不同的概念. 显然,弱(或弱*)完备空间必然是弱(或弱*)序列完备的. 其逆不真,例如,Banach空间 $L[a,b]$不是弱完备的. 我们将要证明它是弱序列完备的. 为此,先陈述一个定理如下:

定理 设$\{x_n\}\subset L[a,b]$, $x\in L[a,b]$, 则$\{x_n\}$弱收敛于 x 的充要条件是

(i) $\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty$,

(ii) 对任一 Lebesgue 可测集 $E\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E x_n(t)\,dt$ 存在且有限.

现设对任意 $f\in(L[a,b])^*=L^\infty[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在,即对任意$y\in L^\infty[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)dt$存在.取$y(t)=\chi_E(t)$,这里 χ_E 代表集 E的特征函数,则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E x_n(t)dt$ 存在. 由共鸣定理可知$\{\|x_n\|\}$有界. 于是,由上述定理即知存在 $x\in L[a,b]$, 使$\{x_n\}$弱收敛于 x.

注 设 X^* 是无穷维 Banach 空间X 的共轭空间, 则可证明

X^* 总是弱* 序列完备的，但它并不弱*完备．

11．存在某个 Banach 空间，它并不弱序列完备．

设 X 是无穷维 Banach 空间，在 X 上取弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$，则 $(X,\sigma(X,X^*))$ 为一不可度量化的拓扑线性空间．可以证明，它不是完备的．而当 X 自反时，$(X,\sigma(X,X^*))$ 是序列完备的．应当注意，当 X 不自反时，$(X,\sigma(X,X^*))$ 不必是序列完备的，亦即 Banach 空间 X 不必是弱序列完备的．例如，Banach 空间 c_0 不是弱序列完备的．事实上，因为 $c_0^*=l$，并且对每个 $f\in c_0^*$，存在一个 $a=\{a_n\}\in l$，使

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n,\ x=\{\xi_n\}\in c_0.$$

令 $x_n=(1,1,\cdots,1,0,0,\cdots)$，则 $x_n\in c_0$，并且

$$\begin{aligned}|f(x_n)-f(x_m)|&=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{m}a_i\right|\\&=\left|\sum_{i=m+1}^{n}a_i\right|\leq\sum_{i=m+1}^{n}|a_i|.\end{aligned}$$

由于 $a=\{a_n\}\in l$，所以

$$\sum_{i=m+1}^{n}|a_i|\to 0(n,m\to\infty).$$

因此，$\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 数列，即 $\{x_n\}$ 是空间 c_0 中的弱 Cauchy 列．然而，$\{x_n\}$ 在 c_0 中并不弱收敛．因为若有 $x=\{\xi_n\}\in c_0$，使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，那么就有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_k&=f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k.\end{aligned}\tag{1}$$

取 $f_n\in c_0^*$，$f_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，由（1）式得到 $\xi_k=1$，$k=$

1,2,···,于是 $\lim_{k\to\infty}\xi_k\neq 0$,此与 $x=\{\xi_n\}\in c_0$ 相矛盾.

Banach 空间 $C[0,1]$也不是弱序列完备的.

注 设 X 是无穷维 Banach 空间,X^* 是其共轭空间. 可以证明,拓扑线性空间$(X^*,\sigma(X^*, X))$不完备,即X^*不是弱*完备的,但$(X^*,\sigma(X^*,X))$总是序列完备的, 即 X^*总是弱*序列完备的;还可证明,每个 Hilbert 空间都是弱序列完备的.上述反例表明,有别于拓扑线性空间$(X^*,\sigma(X^*,X))$与 Hilbert 空间.一般说来,拓扑线性空间$(X,\sigma(X,X^*))$并不序列完备.

12. 弱序列完备而不自反的 Banach 空间.

Banach 空间 $L[a,b]$并不自反,但它是弱序列完备的(参看例 10).

注 可以证明:若 X 是自反的 Banach 空间, 则 X 必定是弱序列完备的. 例 11 说明了在这个命题中自反性的条件不可去掉;例 12 则说明了这个命题之逆并不成立.

13. 存在无穷维线性空间 X 上的两种不同的拓扑,在这两种拓扑下, X 上的连续线性泛函却是相同的.

设X为一无穷维赋范线性空间, 则X上的范数拓扑与弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$是不同的. 尽管如此, 在这两种拓扑下X上的连续线性泛函却是相同的. 为证明这一陈述, 我们先证明下面的

引理 设 f_1, f_2,···, f_n, f 为 X 上 $n+1$ 个线性泛函, $\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i)\subset N(f)$, 这里, $N(f)$是 f 的零空间, 即

$$N(f)=\{x\in X: f(x)=0\},$$

则 f 为 f_1, f_2, ···, f_n 的线性组合.

证 作映射 $T: X\to\mathbf{R}^n$,

$x\in X\to Tx=(f_1(x), \cdots, f_n(x))\in\mathbf{R}^n$. 再令 $h(Tx)=f(x)$, h 是完全确定的, 因若 $Tx=Ty$, 则 $f_i(x)-f_i(y)=0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 因此 $x-y\in N(f_i)$, 由条件得 $f(x-y)=0$,

所以 $f(x)=f(y)$，于是 $h(Tx)=h(Ty)$. 由上知 h 为 $T(X)$ 上的线性泛函，把 h 延拓到 $\mathbf{R}^n$ 上后仍记为 h. 由于 $\mathbf{R}^n$ 是有限维的，所以

$$h(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i,\quad y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbf{R}^n,$$

从而 $$f(x)=h(Tx)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\quad (x\in X),$$

即有 $$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i.$$

兹证 X 上按拓扑 $\sigma(X,\ X^*)$ 连续的线性泛函全体恰为 X^*. 事实上，X^* 中每个 f 显然都是 $\sigma(X,\ X^*)$ 连续的，这由弱拓扑的定义即知. 反之，设 $f\neq 0$ 是 X 上关于拓扑 $\sigma(X,\ X^*)$ 连续的线性泛函. 由连续性定义，存在零点的弱邻域

$V=\{x\in X:|f_i(x)|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$,

使对每个 $x\in V$ 都有 $|f(x)|<1$. 令

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}N(f_i).$$

设 $x_0\in A$，则 $x_0\in V$，从而 $|f(x_0)|<1$. 因 A 是线性空间，故对任意实数 r，$rx_0\in A$，从而

$$|f(rx_0)|=|r||f(x_0)|<1.$$

由 r 的任意性可得 $f(x_0)=0$. 这样一来，$A\subset N(f)$. 由引理，f 为 $f_1,\ \cdots,\ f_n$ 的线性组合，而 $f_i\in X^*(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，所以 $f\in X^*$.

14. 存在无穷维线性空间 X 上的两种不同的拓扑，在这两种拓扑下，X 中的有界集却是相同的.

对于一个集 A，若 A 关于强拓扑是有界的，则 A 关于弱拓扑也是有界的. 但是，也可能在两种不同拓扑下具有相同的有界集.

为说明这一陈述，我们先证明下面的.

引理 设X与Y都是拓扑线性空间，$f:X\to Y$是连续线性映射，则f映有界集为有界集.

证 设A是X中的有界集. 任取Y中的零点邻域V，则$f^{-1}(V)$是X中的零点邻域，而A有界，故存在$\lambda>0$使$A\subset\lambda f^{-1}(V)$，从而$f(A)\subset\lambda V$，证毕.

今设X为一无穷维赋范线性空间. 我们证明，若A是X中弱拓扑$\sigma(X,X^*)$下的有界集，则它也是X中范数拓扑下的有界集. 任取$f\in X^*$，则f也是$\sigma(X, X^*)$连续的. 由引理可知，$f(A)$是有界的. 再由共鸣定理，可见A是范数拓扑下的有界集.

注 本例中的引理说明了，若f是由拓扑线性空间X到拓扑线性空间Y中的连续线性映射，则f把有界集映成有界集. 应当注意，这个命题之逆并不成立. 例如，设X是无穷维赋范线性空间，则$(X, \|\cdot\|)$与$(X, \sigma(X, X^*))$中的有界集是相同的，从而恒等映射$I:(X, \sigma(X, X^*))\to(X, \|\cdot\|)$把有界集映成有界集. 然而，$I$并不连续.

由Mackey定理可知，任何局部凸拓扑线性空间(X, τ)中的子集强有界(即按拓扑τ有界)与弱有界(即按拓扑$\sigma(X, X^*)$有界)是等价的.

15. 共轭空间中弱*有界而不弱有界的集合.

设X为一赋范线性空间，A为X^*的子集. 容易证明，若A是弱有界集，即它是拓扑线性空间$(X^*,\sigma(X^*,X^{**}))$中的有界集，则它亦必是弱*有界的. 若X是Banach空间，则由共鸣定理可知，弱*有界集必是弱有界集. 然而，当X不完备时，X^*中的弱*有界集未必是弱有界的. 例如，在线性空间E^∞上定义范数

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n| \quad (x=\{\xi_n\}\in E^\infty),$$

则E^∞为一不完备的赋范线性空间. 令

$$f_n(x)=n\xi_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则 $f_n\in(E^\infty)^*$. 任取 $x\in E^\infty$，由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n\xi_n=0,$$

故存在常数 M(M 依赖于 x)，使

$$|f_n(x)|\leqslant M,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

因此，对于趋于 0 的任何数列$\{\lambda_n\}$，$\{\lambda_n f_n\}$ 弱*收敛于 0，从而 $A=\{f_n\}$是弱*有界的.

另一方面，由于$(E^\infty)^*=l$，因而由 f_n 的定义可知，f_n 可表成下列形式：

$$f_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ n,\ 0,\ \cdots)\in l.$$

今取 $\lambda_n=\dfrac{1}{n}$，则对 $F=(1,\ 1,\ \cdots)\in(E^\infty)^{**}=l^\infty$而言，有

$$F(\lambda_n f_n)=1,$$

即$\{\lambda_n f_n\}$并不弱收敛于 0，故 $A=\{f_n\}$不是弱有界的.

注 若X是 Banach 空间，则 X^*中强有界（即按范数拓扑有界）、弱有界与弱*有界这三个概念是等价的.

16. 某个共轭空间中强闭而不弱*序列闭的子空间.

可以证明，若 A 是赋范线性空间 X 的凸子集，则 A 为弱序列闭的充要条件是 A 为强闭的. 应当注意，当 A 为 X^* 的子空间时，从 A 的强闭推不出 A 为弱*序列闭的. 例如，取 $X=L[0,\ 1]$，$X^*=L^\infty[0,\ 1]$. 显然，$C[0,\ 1]$是 $L^\infty[0,\ 1]$的闭的真子空间.

$C[0,\ 1]$在 $L^\infty[0,\ 1]$中是弱*序列稠密的，因为对任一 $f\in L^\infty[0,\ 1]$，由 Лузин 定理，存在$\{f_n\}\subset C[0,\ 1]$，使$\{f_n\}$测度收敛于 f，从而对任一 $x\in L[0,\ 1]$，有

$$f_n(x)=\int_0^1 f_n(t)x(t)dt\to\int_0^1 f(t)x(t)dt=f(x).$$

即$\{f_n\}$弱*收敛于 f.

$C[0,\ 1]$不是弱*序列闭的. 如若不然，就有 $C[0,\ 1]\supset L^\infty[0,\ 1]$，此为不可能.

17. 某个赋范线性空间中强闭而不弱序列闭的子集.

容易证明，赋范线性空间中的弱序列闭子集必定是强闭的. 如果这个子集是凸的，那么上述命题之逆也成立. 然而，一般说来强闭子集不必是弱序列闭的. 例如，在 Banach 空间 l^2 中取 $A=\{e_n\}$，其中

$$e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),$$

则 $\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}\ (n\neq m)$，故 A 是 l^2 中的强闭子集. 另一方面，$\{e_n\}$ 弱收敛于 0，而 $0\notin A$，故 A 不是弱序列闭的.

18. 共轭空间中弱序列闭而不弱*序列闭的子集.

设 $X=L[0, 1]$，则 $X^*=L^\infty[0, 1]$，且 $C[0,1]$ 是 X^* 中的凸的强闭子集，从而它也是弱序列闭的. 然而，$C[0,1]$ 在 X^* 中不是弱*序列闭的(参看例 16).

注　设 X 为一局部凸空间. 显然，X 中任一弱闭集是强闭的，其逆不真. 但应注意，Hilbert 空间中每一强闭集必是弱闭的.

Mazur 证明了，若 E 是局部凸空间 X 中的凸子集，则 E 为强闭当且仅当 E 为弱闭. 例 18 说明了 Mazur 定理中 E 为凸的条件不可去掉.

对于赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 中的子集 E，显然，若 E 弱*闭，则其亦必弱闭；若 E 弱闭，则其亦必强闭. 若 E 是凸的，则由 Mazur 定理可知，E 强闭的充要条件是 E 为弱闭的. 例 16 说明了仍不能保证 E 是弱*闭的. 其实可以证明，Banach 空间 X 为自反的充要条件是：X^* 中的每个弱闭集是弱*闭的. 又，共轭空间中弱*序列闭的子集必为弱序列闭的. 例 18 说明了这个命题之逆不真.

19. 存在某个赋范线性空间的子集，它的弱闭包与弱序列闭包并不相同.

如所周知，赋范线性空间 X 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，相当于按拓扑 $\sigma(X, X^*)$，$x_n\to x$. 但由于 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 一

般不是距离拓扑，因而点列的弱收敛不能完全刻划弱拓扑. von Neumann[282]于1930年就注意到了一个集合的弱闭包不能借助于点列弱收敛来定义的事实. 他在 Hilbert 空间$L^2[-\pi, \pi]$中给出了一个集合

$$A=\{x_{m,n}(t): x_{m,n}(t)=e^{imt}-me^{int}\},$$

这里m, n是整数且$0\leqslant m<n$. 集A在弱拓扑意义下有唯一的聚点，但A不包含任何弱收敛到该点的子列. 因此，集A的弱闭包与弱序列闭包并不相同.

现在我们再给出一个属于 Shields 的例子如下：

设$\{e_n\}$是无穷维可分 Hilbert 空间H中的就范直交系，即当$m=n$时，$\langle e_n, e_m\rangle=1$，而当$m\neq n$时，$\langle e_n, e_m\rangle=0$. 在$H$上取弱拓扑$\sigma(H, H^*)$，并令

$$A=\{\sqrt{n}\,e_n: n=1, 2, \cdots\}.$$

因$\|\sqrt{n}\,e_n\|=\sqrt{n}$，故$A$中的任何子列都不弱收敛. 因此，$A$是弱序列闭的.

另一方面，0属于A的弱闭包$\bar{A}^w$. 事实上，设

$$\{x: |\langle x, f_i\rangle|<\varepsilon, i=1, 2, \cdots, k\}$$

是0的基本弱邻域，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f_i, e_n\rangle|^2<+\infty, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|\langle f_i, e_n\rangle|\right)^2<+\infty.$$

因此，存在正整数n而有$\sum_{i=1}^{k}|\langle f_i, e_n\rangle|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. 对于这样的$n$，就有

$$|\langle f_i, e_n\rangle|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

从而$|\langle\sqrt{n}\,e_n, f_i\rangle|<\varepsilon$, $i=1, 2, \cdots, k$，即点列$\{\sqrt{n}\,e_n\}$与0的每个基本弱邻域相交，故$0\in\bar{A}^w$. 由此可知，集A的弱序列闭

包与弱闭包并不相同.

注 这个例子也说明了弱序列闭集不必是弱闭的.

20. 存在某个共轭空间中的子集，它的弱*闭包与弱*序列闭包并不相同.

设 $X=l^p(1\leqslant p<+\infty)$，$\{f_n\}\subset X^*$定义为

$$f_n=n^{\frac{1}{p}}e_n,$$

其中 $e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots)$.

兹证 0 属于 $A=\{f_n\}$的弱*闭包 $\overline{A}^{w^*}$. 事实上，设

$$\{x_i=(\xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)},\ \cdots):1\leqslant i\leqslant k\}$$

是 X 的有限子集，$\varepsilon>0$. 由于对每一 i，都有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(i)}|^p<+\infty$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|\xi_n^{(i)}|\right)^p<+\infty.$$

因此，存在正整数 n 而有$\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_n^{(i)}|<\varepsilon n^{-\frac{1}{p}}$(假如不然，即对任意 n 均有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|\xi_n^{(i)}|\right)^p\geqslant\varepsilon^p n^{-1},$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_n^{(i)}|\right)^p=+\infty$，此为矛盾). 对于这样的 n，就有

$$|f_n(x_i)|=n^{\frac{1}{p}}|\xi_n^{(i)}|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

因此，点列$\{f_n\}$与每个零点弱*基本邻域相交. 故 $0\in\overline{A}^{w^*}$.

另一方面，0 不属于 A 的弱*序列闭包. 事实上，如果存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$，使$\{f_{n_i}\}$弱*收敛于 0，则据共鸣定理，$\{f_{n_i}\}$应当是一致有界的. 然而由$\{f_n\}$的定义可知，这是不可能的.

注 容易证明，拓扑线性空间中的闭集一定是序列闭的. 例 19 与例 20 都说明了这个命题之逆并不成立.

21. 存在某个共轭空间中弱*序列连续而不弱*连续的线性泛函.

下面的例子属于 Kripke[162].

设 Γ 为一不可数集，$X=l^\infty(\Gamma)$ 是定义在 Γ 上的这样的有界实值函数 x 的全体，使得 $\{\gamma\in\Gamma:x(\gamma)\neq 0\}$ 至多为一可数集. 把此可数集记为 $E(x)=\{\alpha_k\}$，并称 $E(x)$ 为 x 的支撑. 令

$$\|x\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|=\sup_{\alpha_k\in E(x)}|x(\alpha_k)|,$$

则 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数，按通常的线性运算及范数 $\|\cdot\|$，X 为一个 Banach 空间.

设 f 是 X 上的连续线性泛函，即 $f\in X^*$. 称 Γ 的子集 T 是一个关于 f 的支撑集，是指当 $E(x)$ 与 T 不相交时 $f(x)=0$.

兹证，对于每个 $f\in X^*$，存在 f 的可数支撑集 T.

事实上，因 f 有界，故存在 $\{x_n\}\subset X$，使 $\|x_n\|=1$，$n=1,2,\cdots$，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\|f\|.$$

令 $T=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(x_n)$，则 T 为一可数集. 若 $E(y)$ 与 T 不相交且 $\|y\|\leqslant 1$，则对每一 n 有 $\|y+x_n\|=1$. 假如 $f(y)>0$，选取 n 充分大，使得 $f(x_n)>\|f\|-f(y)$. 但

$$\begin{aligned}f(y)+f(x_n)&=f(y+x_n)\\&\leqslant\|f\|\|y+x_n\|\\&=\|f\|,\end{aligned}$$

此为矛盾. 因此，$f(y)=0$，从而 T 是 f 的一个支撑集.

设 T 是 Γ 的一个可数子集，χ_T 是 T 的特征函数. 如果 $T\subset U$ 且 T 与 U 都是 f 的可数支撑集，那么 $\chi_U-\chi_T=\chi_{U\setminus T}$ 的支撑与 T 不相交，于是 $f(\chi_U-\chi_T)=0$. 由此可知，若 T 与 U 是 f 的任意两个支撑集，则

$$f(\chi_U)=f(\chi_{U\cup T})=f(\chi_T).$$

因此，我们可以唯一地定义从 X^* 到实数集的函数 φ 如下：

$$\varphi(f)=f(\chi_T),$$

其中 $f\in X^*$，而 T 是 f 的任一支撑集．显然，φ 是线性的．

(i) φ 是弱*序列连续的．

设 $\{f_n\}$ 是 X^* 中的一个点列，它弱*收敛于 $f\in X^*$，则

$$T=E(f)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n)$$

是 f 与 f_n 的可数支撑集．因此，

$$\begin{aligned}\varphi(f)=f(\chi_T)&=\lim_{n\to\infty}f_n(\chi_T)\\&=\lim_{n\to\infty}\varphi(f_n).\end{aligned}$$

即 φ 是弱*序列连续的．

(ii) φ 不是弱*连续的．

我们只要证明 $C=\varphi^{-1}(1)=\{f\in X^*:\varphi(f)=1\}$ 不是弱*闭的．为此，只要证明 X 上的零泛函 z 是 C 的弱*聚点，但 $z\notin C$．任取 z 在 X^* 中的一个邻域 O，它包含一个形如

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\{f\in X^*:|f(x_j)|<1,j=1,2,\cdots,n\}$$

的 z 的一个基本弱*邻域，这里，$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的一些元素．任取一点 $\gamma\in\Gamma$，它在集 $E(x_1)\cup\cdots\cup E(x_n)$ 之外．若令 $f(x)=x(\gamma)$，则 $f\in X^*$，且 $f\in V(x_1,\cdots,x_n)\subset O$，这是因为 γ 在 $E(x_1)\cup\cdots\cup E(x_n)$ 之外，$x_1,\cdots,x_n$ 在 γ 处的值均为 0．另一方面，$\varphi(f)=f(\chi_{\{\gamma\}})=1$，故 $f\in C$．因此，z 的每个弱*邻域都与 C 相交，即 z 是 C 的一个弱*聚点．因 z 是零泛函，故 $z\notin C$，从而 C 不是弱*闭的．

注 设 X 与 Y 都为拓扑线性空间，f 是 X 到 Y 的映射．若 f 是连续的，则它亦必是序列连续的．上述反例说明了这个命题之逆并不成立．又，若 X 为满足第一可数公理的拓扑空间，Y 为任意拓扑空间，f 是 X 到 Y 内的映射，则 f 为连续的充要条件是 f 为序列连续的．上述反例还说明了在这个命题中 X 满足第一可数公理的条件不可去掉．

22．某个共轭空间的子集，它的范数拓扑闭包与弱*拓扑闭包并不

相同.

设X为非自反的Banach空间，J为X到X^{**}内的典则映射，则$J(X)$是X^{**}中的范数拓扑下的闭子空间，故$J(X)=\overline{J(X)}$. 另一方面，由Goldstine定理可知，$J(X)$在X^{**}中弱*稠密，即$J(X)$的弱*闭包$\overline{J(X)}^{w^*}$是X^{**}，故$\overline{J(X)}\neq\overline{J(X)}^{w^*}$.

注　我们用$K(J(X))$代表$J(X)$在X^{**}中的弱*序列闭包. Mcwilliams[218]指出：$K(J(X))$在X^{**}中是强闭的，而$K(K(J(X)))$在X^{**}中未必是强闭的.

23. $L^\infty(\mathbf{R}^1)$中存在一个弱*稠密的子空间F，使对任何r ($0<r\leqslant 1$)，$F\cap B_r$在B_r中均不弱*稠密，此地B_r是半径为r的闭球.

Goldstine曾证明了，若X为Banach空间，$J: X\to X^{**}$是典则映射，则对X^{**}中的强闭单位球B，$J(X)\cap B$在B中必是弱*稠密的.

由于X^{**}的子空间$J(X)$在X^{**}中是全整的，因而$J(X)$在X^{**}中必是弱*稠密的. 自然猜测，$J(X)\cap B$在B中弱*稠密是子空间$J(X)$在X^{**}中弱*稠密的必然后果. 然而，Dixmier[87]指出，X^{**}中的弱*稠密子空间不必满足Goldstine定理的断语. 事实上，Dixmier得到了一个很强的结果，他构造了一个Banach空间X及X^*的弱*稠密子空间F，具有性质：对每一r($0<r\leqslant 1$)，$F\cap B$在半径为r的闭球B_r中并不弱*稠密.

Dixmier的反例比较复杂，针对这一情况，Robert[263]只用了Fourier分析中的两个基本结果——Kronecker定理及$L(\mathbf{R}^1)$上Fourier变换的值域不闭的事实，构造了一个反例如下：设H是$\mathbf{R}^1$的稠密子集，使H在有理数域上线性无关. 令F是由集$\{e^{iht}: h\in H\}$的一切有限线性组合生成的$L^\infty(\mathbf{R}^1)$的强闭子空间.可以证明，F是具有所需性质的$L^\infty(\mathbf{R}^1)$中的弱*稠密子空间. 证明细节可参看作者原文.

24. 一个不可分的Banach空间，其共轭空间弱*可分.

如所周知，如果 Banach 空间 X 不可分，那么它的共轭空间 X^* 也一定不可分．然而，存在不可分的 Banach 空间，其共轭空间是弱*可分的．例如，Banach空间 $X=l^\infty$ 是不可分的．兹证 X^* 是弱*可分的．事实上，对 $x=\{\xi_n\}\in X$，令

$$f_n(x)=\xi_n,\ n=1,2,\cdots,$$

则 f_n 是 X 上的有界线性泛函，即 $A=\{f_n\}\subset X^*$．任取 $x=\{\xi_n\}\in X$，$x\neq 0$，则存在正整数 n 使 $\xi_n\neq 0$，从而存在 $f_n\in A$ 使 $f_n(x)\neq 0$．换句话说，若对每一 n 有 $f_n(x)=0$，则 $x=0$．由此可知，A 张成的弱*闭线性空间就是 X^*，故 X^* 是弱*可分的．

注　可以证明，若 X 是可分的赋范线性空间，则其共轭空间 X^* 必定是弱*可分的．上述反例说明了这个命题之逆并不成立．

25．弱*可分而不弱可分的共轭空间．

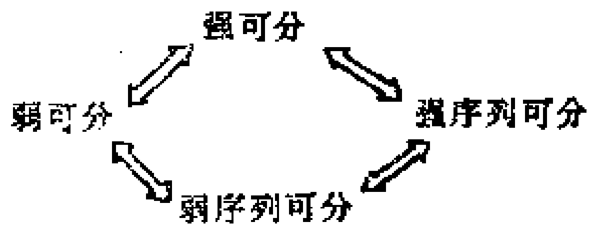
可以证明，设 X 为 Banach 空间，则 X 强可分当且仅当 X 弱可分．由于 X 强可分等价于 X 强序列可分，因而对 Banach 空间 X 而言，X 强可分、强序列可分、弱可分和弱序列可分这四个概念彼此都是等价的．还可证明，若 X 的共轭空间 X^* 弱可分，则其亦必弱*可分．但应注意，这个命题之逆并不成立．例如，Banach 空间 l^∞ 的共轭空间 $(l^\infty)^*$ 是弱*可分的（参看例 24）．因 $(l^\infty)^*$ 强可分等价于弱可分，而 $(l^\infty)^*$ 并不强可分，故知其亦必不是弱可分的．

26．弱*可分而不弱*序列可分的共轭空间．

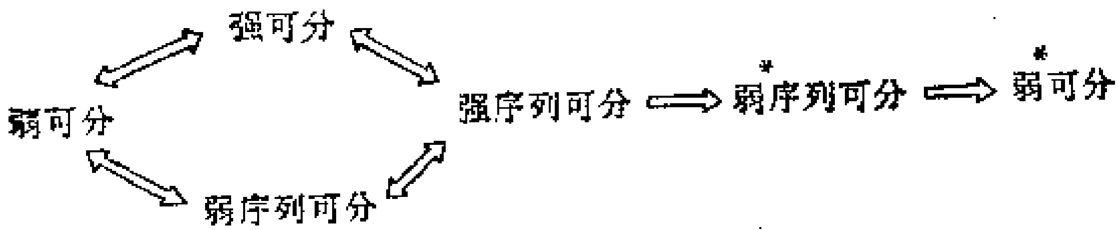
设 X 是一赋范线性空间，X^* 为其共轭空间．若 X^* 是弱*序列可分的，则其亦必是弱*可分的．应当注意，这个命题之逆并不成立．例如，取 $X=l^\infty$，则 $X^*=(l^\infty)^*$ 是弱*可分的（参看例 24）．

兹证 $(l^\infty)^*$ 不是弱*序列可分的．事实上，如果它是弱*序列可分的，即存在可数集 $\{f_n\}\subset(l^\infty)^*$，使每一 $f\in(l^\infty)^*$ 是 $\{f_n\}$ 的某个子列 $\{f_{n_k}\}$ 的弱*极限．因 $(l^\infty)^*$ 中点列的弱*收敛性与弱收敛性是等价的（参看例 34），故 $(l^\infty)^*$ 也是弱可分的，从而是可分的（参看[37]，p.134）．然而这是不可能的，因为 l^∞ 并不可分．

注 关于Banach空间的各种可分性之间的关系，我们有



关于共轭空间的各种可分性之间的关系，我们有



27. 一个弱*可分的共轭空间，其中存在不弱*可分的闭子空间.

容易证明，可分度量空间的子空间亦必可分. 对于Banach空间，因强可分、强序列可分、弱可分与弱序列可分这四个概念彼此都是等价的，故知若Banach空间X强可分（强序列可分、弱可分、弱序列可分），则其子空间亦必强可分（强序列可分、弱可分、弱序列可分）. 但是，可分局部凸空间的闭子空间未必可分. Lohman和Stiles[207]有例如下：

设X是Banach空间l^∞的共轭空间，并在X上取弱*拓扑，则X是弱*可分的（参看例24）. 据[270]的命题3.4，X包含一个不可分Hilbert空间H的副本Y. 因Y是自反的，故由[270]的命题1.2知，Y是X的一个弱*闭子空间. 由于Y自反且Y不可分，故Y也不弱*可分.

28. 某个共轭空间中弱*紧而不弱*序列紧的子集.

取$X=l^\infty$，据Banach-Alaoglu定理，X^*中的单位闭球

$$U^*=U(X^*)=\{f\in X^*:\|f\|\leqslant 1\}$$

是弱*紧的.

兹证U^*不是弱*序列紧的. 事实上，令

$$f_n(x)=\xi_n,\quad x=\{\xi_n\}\in l^\infty,$$

则f_n为l^∞上的线性泛函且$\|f_n\|=1$，故$f_n\in U^*$. 但是$\{f_n\}$没有弱*收敛子列，因为对$\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_i}\}$，取$x\in l^\infty$如下：

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),$$

其中$\xi_{n_1}=1,\xi_{n_2}=2,\ \xi_{n_3}=1,\ \xi_{n_4}=2,\cdots$，其余的$\xi_n=0$，显然，$\{f_{n_i}(x)\}$并不收敛，即$\{f_{n_i}\}$不是弱*收敛的子列.

注 对于一般的拓扑空间X的子集A，A是紧的、序列紧的与可数紧的这三者的关系如下：紧⇒可数紧；序列紧⇒可数紧.

当X可度量化时，三者是等价的. 故对于赋范线性空间的范数拓扑，三者是等价的，即A为强紧的，当且仅当它是强序列紧的，或当且仅当它是强可数紧的.

但是，对无穷维赋范线性空间X，一般地，X上的弱拓扑$\sigma(X,X^*)$及X^*上的弱*拓扑$\sigma(X^*,X)$是不可度量化的. 然而，关于$\sigma(X,X^*)$，Eberlein-Smulian 定理指出，这三者是等价的，即$A\subset X$是弱紧的，当且仅当它是弱序列紧的，或当且仅当它是弱可数紧的. 关于共轭空间X^*上的弱*拓扑$\sigma(X^*,X)$，X^*中弱*序列紧的子集必是弱*紧的. 上述反例说明了这个命题之逆不真.

又，若X为一可分的赋范线性空间，则X^*的单位闭球必是弱*序列紧的. 上述反例也说明了在这个命题中，X为可分的条件不可去掉.

29. 某个共轭空间中的弱*序列紧集，它不是范数拓扑下的有界集.

由共鸣定理，若X是 Banach 空间，A是X^*的子集，使对任一$x\in X$，都有

$$\sup_{f\in A}|f(x)|<+\infty,$$

则A在范数拓扑下有界. 应当注意，假如X不完备，那么X^*中的弱*序列紧集也不必是范数拓扑下的有界集. 例如，对$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，令

$$\|x\| = \sum_k |\xi_k|,$$

则 X 为一不完备的赋范线性空间. 在 X 上定义线性泛函如下:

$$f_n(x) = \xi_n,$$

则 $\|f_n\| = 1$, 故 $f_n \in X^*$. 设 $\{t_n\}$ 是正数列, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$. 令

$$A = (0, t_1 f_1, t_2 f_2, \cdots) \subset X^*,$$

则对任一 $x \in X$, 都有

$$t_n f_n(x) = t_n \xi_n \to 0 (n \to \infty),$$

即 $\{t_n f_n\}$ 弱*收敛于 0, 故 A 是弱*序列紧的. 但因 $\|t_n f_n\| = t_n$, 故 A 在 X^* 中是无界的.

注 可以证明, 若弱*序列紧集 A 是凸的, 则 A 必是强有界的. 上述反例也说明了在这个命题中 A 为凸集的条件不可去掉.

30. 某个赋范线性空间中的弱序列紧而不强序列紧的集合.

设 $X = l^p$ 或 $L^p[a,b]$ $(1 < p < +\infty)$. 因 X 是自反的 Banach 空间, 故由 Kakutani 定理知 X 内的单位闭球是弱序列紧的. 然而, X 内的单位闭球显然并不序列紧.

注 因赋范线性空间内的子集为弱序列紧的充要条件是它为弱紧的, 故上述反例也说明了赋范线性空间内弱紧集不必是紧的.

31. 某个共轭空间中弱*序列紧而不弱序列紧的集合.

设 X 为序列空间 c. 因 X 可分, 故 $X^* = l$ 内的单位闭球是弱*序列紧的.

兹证 X^* 内的单位闭球不是弱序列紧的. 如若不然, 则由空间 l 中点列的强收敛性与弱收敛性是等价的, 便得到 l 中的单位闭球也是序列紧的, 这与 l 是无穷维赋范线性空间发生矛盾.

注 容易证明, $X^* = l$ 内的单位闭球也是弱*紧的. 另一方面, 由 Eberlein-Smulian 定理可知, 一个集为弱序列紧当且仅当它是弱紧的. 因此, 上述反例也说明了共轭空间中的弱*紧集不必是弱紧的.

32．赋范线性空间中弱序列完备而不弱序列紧的集合.

赋范线性空间X的子集E称为完备的，是指对任一Cauchy点列$\{x_n\}\subset E$，$\{x_n\}$必收敛于某个$x_0\in E$. E称为弱序列完备的，是指对任一弱Cauchy点列$\{x_n\}\subset E$(即对任一$f\in X^*$，都有$|f(x_n)-f(x_m)|\to 0\ (m,n\to\infty)$)，$\{x_n\}$必弱收敛于某个$x_0\in E$. 同理可引入共轭空间$X^*$中子集的弱*序列完备的概念.

容易证明：若E是紧的，则E必是完备的、若E是弱序列紧的，则E必是弱序列完备的. 若X^*的子集E是弱*序列紧的，则E必是弱*序列完备的. 应当注意，这些命题之逆均不成立. 这里，我们给出一个弱序列完备而不弱序列紧的集合的例子.

考虑Banach空间l的单位闭球B，并任取弱Cauchy点列$\{x_n\}\subset B$. 因l中点列的强、弱收敛性是等价的，故$\{x_n\}$即为l中通常的Cauchy点列. 于是，由l的完备性即知$\{x_n\}$的极限存在，且该极限仍属于B. 此即说明B是弱序列完备的. 另一方面，考虑B内的点列$\{e_n\}$，其中$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$. 对任一子列$\{e_{n_k}\}$，取$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots)\in l^*=l^\infty$，其中

$$f_n=\begin{cases}1, & n=n_{2m},m=1,2,\cdots;n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则有$f(e_{n_k})=1,k=2m$；$f(e_{n_k})=0,k=2m-1$. 因此，当$k\to\infty$时，$\{f(e_{n_k})\}$无极限存在，从而更谈不上$\{e_{n_k}\}$弱收敛，即B不是弱序列紧的.

33．存在紧集，它的闭凸包不是紧的.

紧集的闭凸包不必是紧的. 这里，我们给出两个例子如下：

第一例　某个赋范线性空间中的弱紧集，其弱闭凸包不是弱紧的.

对$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，令$\|x\|=\sum\limits_n|\xi_n|$，$x_n=(0,\cdots,0,\frac{1}{n},0,\cdots)$，则$\{x_n\}$与0所成之集$A$是紧的，从而也是弱紧的.

易见，A是无穷维的，即包含A的任何线性子空间都是无穷维

的. 兹证A的弱闭凸包K不是弱紧的. 反设K是弱紧的，于是K是完备的凸集. 由此可以证明K是有限维的. 从而导致矛盾. 事实上，如果K是无穷维的，那么必定存在无穷子列$\{n(k)\}$，使得

$$G_k=\{x: x\in K, \xi_{n(k)}\neq 0\}$$

非空. 因K是凸集，故每个G_k在K中稠密. 又因K是第二纲的，故$\bigcap_{k=1}^{n} G_k\neq\varnothing$，此为矛盾. 因此，$K$是有限维的.

第二例 某个共轭空间中的弱*紧集，其弱*闭凸包不是弱*紧的.

对$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，令$\|x\|=\sup_n|\xi_n|$，$f_n(x)=\xi_n$，则$f_n\in(E^\infty)^*$，且$2^{2n}f_n(n=1,2,\cdots)$与0所成之集A是弱*紧的. 但A并不范数有界，于是A的弱*闭凸包K不可能是弱*紧的，因为如果K是弱*紧的，那么由共鸣定理即知，A将是范数有界的，这就导致矛盾.

注 我们有 Mazur 定理：若X是 Banach 空间，A是X中的强紧集，则A的强闭凸包也是强紧的. 又有 Krein-Milman 定理：若X是 Banach 空间，A是X中的弱紧集，则A的强闭凸包是弱紧的. 上述反例表明，对于一般的局部凸空间，这些命题均不成立.

34. 某个非自反的 Banach 空间 X，使 X^* 中点列的弱收敛与弱*收敛相一致.

设X是可分的 Banach 空间. 可以证明，若对任何点列$\{f_n\}\subset X^*$，由$\{f_n\}$的弱*收敛性推出它也是弱收敛的，则X必是自反的.

应当注意，在这个命题中X为可分的条件不可去掉. 1953年，Grothendieck[123]发现不可分 Banach 空间$(l^\infty)^*$中点列的弱*收敛性与弱收敛性是相一致的. 然而，Banach 空间l^∞并不自反.

注 设X是 Banach 空间. 若X^*中点列的弱*收敛与弱收

敛相一致，则称 X 为 Grothen-dieck-Banach 空间，简称GB空间．因此，l^∞是一个 GB空间．应当注意，GB空间的闭子空间不必是 GB 空间．例如，c_0是 GB 空间 l^∞ 的一个闭子空间．由于$(c_0)^*=l$，而 l 中点列的弱*收敛与弱收敛并不一致，故c_0不是GB空间．

关于 GB 空间，我们提出下列问题．

问题 1　非自反的 GB 空间必定有线性同胚于 c_0或 l^∞的子空间吗？

问题 2　Schur 空间的共轭空间必为 GB 空间吗？

问题 3　若 Banach 空间 X 自反，则 $L(X)$为 GB 空间吗？

问题 4　每个 GB 空间是否都有一个可分的商空间？

35．某个 Banach 空间 X，使 X^*中点列的弱*收敛与弱收敛相一致，但 X^*中点集的弱*紧与弱紧并不一致．

设 X 是 Banach 空间 l^∞，则 X^*中点列的弱*收敛与弱收敛是一致的．

另一方面，X^*中点集的弱序列紧与弱紧是一致的．但 X^*中的单位闭球 $U^*=\{f\in X^*: \|f\|\leqslant 1\}$是弱*紧而不弱*序列紧的．因此，$U^*$是弱*紧而不是弱紧的．

36．有界闭集都是紧的无穷维局部凸空间．

如所周知，对于有限维赋范线性空间，其中的有界闭集必是紧的．对于无穷维赋范线性空间，有界闭集不必是紧的．其实，在任何一个无穷维赋范线性空间中总存在非紧的有界闭集．但应注意，确实存在这样的局部凸空间，其中的每个有界闭集都是紧的．例如，设 X^*是赋范线性空间 X 的共轭空间，在 X^*上考虑弱*拓扑 $\sigma(X^*,X)$，则 X^*中每个弱*有界且是弱*闭的子集必是弱*紧的（参看[16]，p.40）．

注　如果一个拓扑线性空间中的有界闭集都是紧的，则称此空间为 Motel 空间．上述例子说明，若 X 是赋范线性空间，则局部凸空间$(X^*,\sigma(X^*,X))$是一个 Motel 空间．

第五章 Banach空间中的基

引言

本章主要给出拓扑线性空间特别是赋范线性空间的基的例子，也涉及赋范线性空间中关于无穷级数收敛性的例子，给出基本定义和性质如下：

设X是赋范线性空间，$x, x_n \in X, n=1,2,\cdots$. 若

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\| \to 0 (n \to \infty),$$

则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$收敛于x.

赋范线性空间中的级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$称为无条件收敛的，是指此级数的项在任意相互交换次序后仍旧是收敛的. 也就是说，每个改换排列的级数$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{n_\nu}$仍旧收敛.

级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$称为绝对收敛的，是指数项级数$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$收敛.

容易证明，Banach 空间中级数的绝对收敛蕴涵无条件收敛；而无条件收敛蕴涵收敛，但反过来是不正确的.

设X为一拓扑线性空间，点列$\{x_n\} \subset X$称为X的基，是指对每一$x \in X$，存在唯一的数列$\{\alpha_n\}$，使

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \tag{1}$$

级数(1)在X的拓扑意义下收敛.

容易证明，基是线性无关的；具有基的 Banach 空间是可分

的.

设$\{x_n\}$是拓扑线性空间X的基,则由等式

$$f_n(x)=\alpha_n \quad \left(x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\in X\right)$$

确定的线性泛函f_n称为关于基$\{x_n\}$的坐标泛函或系数泛函. 显然,当$i=j$时,$f_j(x_i)=1$;而当$i\neq j$时,$f_j(x_i)=0$. 于是,若$\{x_n\}$是拓扑线性空间X的基,且$\{f_n\}$是相应于基$\{x_n\}$的坐标泛函列,则对每一$x\in X$,有唯一表达式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)x_n.$$

若每个坐标泛函$f_n(n=1,2,\cdots)$在拓扑线性空间X上都是连续的,则称$\{x_n\}$为X的Schauder基. 例如,令

$$e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),$$

则$\{e_n\}$是Banach空间$l^p(1\leqslant p<+\infty)$或$c_0$的Schauder基,这种基又称为$l^p$或$c_0$中的自然基,亦称为单位向量基.

设X是拓扑线性空间,且$\{x_n\}\subset X$,$\{f_n\}\subset X^*$. 若当$i=j$时,$f_j(x_i)=1$,而当$i\neq j$时,$f_j(x_i)=0$,则称$\{x_n\}$与$\{f_n\}$成为双直交列或双直交系.

设X为一赋范线性空间,$\{x_n\}\subset X$. 若对每一$x\in X$,在弱拓扑$\sigma(X,X^*)$意义下都可唯一地表为

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$$

的形式,则称$\{x_n\}$为X的弱基. 如果坐标泛函$\alpha_n=f_n(x)$都是弱连续的,就称$\{x_n\}$为X的弱Schauder基. 仿此,在共轭空间X^*中可引进弱*基和弱*Schauder基的概念.

设X是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset X$. 如果$\{x_n\}$为$\overline{\text{span}}\{x_n\}$的基,而$\overline{\text{span}}\{x_n\}\neq X$,则$\{x_n\}$称为$X$的一个基序列.

设$\{x_n\}$是赋范线性空间X的基，$\{m_n\}(n=1,2,\cdots)$为递增的正整数列，$m_0=0$，$\{\alpha_n\}$为一实数列．令

$$z_n=\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n}\alpha_i x_i,\ z_n\neq 0,\ n=1,2,\cdots,$$

称$\{z_n\}$为$\{x_n\}$的块基序列．

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为单调的，如果对任意有限个实数$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+m}$，皆有不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n+m}\alpha_i x_i\right\|.$$

对$x=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)x_i\in X$，令$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i$，称$P_n$为$\{x_n\}$的自然射影．可以证明，基$\{x_n\}$为单调基的充要条件是对每个$x\in X$，$\|P_n(x)\|$是$n$的不减函数．

若$\{x_n\}$是赋范线性空间X的基，则$\sup\limits_n\|P_n\|<+\infty$，通常称$\sup\limits_n\|P_n\|$为$\{x_n\}$的基常数．容易看到，一个基是单调基的充要条件是它的基常数等于1．

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为无条件基，如果对每一$x\in X$，级数$\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)x_i$是无条件收敛的．条件基的含义是不言而喻的．

为了本章某些例子的需要，我们还陈述一些定理如下：

定理 1　设$\{x_n\}$是赋范线性空间X中具有基常数为C的无条件基序列，则对每一使级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛的数列$\{\alpha_n\}$及每一有界数列$\{\lambda_n\}$，都有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\alpha_n x_n\right\|\leqslant 2C\sup_n|\lambda_n|\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|.$$

定理 2 设Y是具有无条件基的 Banach 空间X的闭子空间，则Y为弱序列完备的充要条件是：Y不含有线性同胚于空间c_0的子空间.

设X,Y都是赋范线性空间，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$分别是X,Y中的基. 如果存在线性同胚映射$T:X\to Y$，使对每一n，均有$Tx_n=y_n$，则称$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是等价的.

可以证明，$\{x_n\}$与$\{y_n\}$等价的充要条件是：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$收敛当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i y_i$收敛.

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为Bessel 基，是指$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛蕴涵$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|^2<+\infty,$$

其中$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的坐标泛函列. $\{x_n\}$称为 Hilbert 基，是指由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<+\infty$推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛，即对于每个数列$\{\alpha_n\}$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<+\infty$，则存在(显然唯一)$x\in X$而有$f_n(x)=\alpha_n$.

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为有界完全的，如果对每个数列$\{\alpha_n\}$，从$\sup\limits_{n}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|<+\infty$能推出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛.

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为收缩的，如果对每个$f\in X^*$，皆有

$$P_n(f)=\sup\{f(x): x\in\overline{\text{span}}\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\},\ \|x\|\leqslant 1\}\to 0$$
$(n\to\infty)$.

定理 3 若$\{x_n\}$是 Banach 空间X的收缩基，则坐标泛函列$\{f_n\}$为X^*的有界完全基.

定理 4 若X是具有基$\{x_n\}$的 Banach 空间，则X自反的充要条件是$\{x_n\}$既是收缩的，又是有界完全的.

定理 5 设X是具有无条件基的 Banach 空间，则X自反的充要条件是X^{**}可分.

有关反例中涉及的基的其它定义和性质，我们将在相应的反例中陆续给出. 至于有关基的更多的材料以及上述定理的证明，均可参看[290].

1. Banach空间中收敛而不绝对收敛的级数.

在 Banach 空间 c_0中考虑级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{k}$,其中 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$. 设 $x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots\right)$,则$x\in c_0$且.

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{k}\right\|=\left\|\left(0,\cdots,0,\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{(n+2)},\cdots\right)\right\|$$
$$=\frac{1}{(n+1)}\to 0\ (n\to\infty),$$

故级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{k}$收敛于 x. 然而它并不绝对收敛，因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|e_k\|}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

2. 赋范线性空间中绝对收敛而不收敛的级数.

在线性空间E^{∞}上定义范数

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n|,$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in E^\infty$. 我们考察级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{k^2}$,由于$\|e_k\|=1$, 因而级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{k^2}$是绝对收敛的. 另一方面,不难看出,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{k^2}=\left(1,\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{n^2},0,\cdots\right)$$

在 E^∞中并不收敛.

注 容易证明,若赋范线性空间是完备的,则绝对收敛的级数必定是收敛的. 上述反例说明了在这个命题中, 空间为完备的条件不能去掉. 其实还可进一步证明, 若赋范线性空间中每个绝对收敛的级数都是收敛的,则这个空间一定是完备的.

3. Banach空间中收敛而非无条件收敛的级数.

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是条件收敛的数项级数,则据 Riemann 重排定理,它可以重排而给出发散级数,即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛而非无条件收敛的级数.

4. 某个 Banach空间中弱无条件收敛而非无条件收敛的级数.

赋范线性空间X中的级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$称为弱无条件收敛的,是指对任一 $f\in X^*$,都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty.$$

容易证明, 无条件收敛的级数必定是弱无条件收敛的. 然而逆命题并不成立. 例如,在区间$[0,1]$上定义连续函数列$\{x_n\}$:

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^n}\leqslant t\leqslant 1,\\ 1, & t=\frac{\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)}{2}=t_n,\\ \text{线性}, & \frac{1}{2^{n+1}}\leqslant t\leqslant t_n,\ t_n\leqslant t\leqslant\frac{1}{2^n}.\end{cases}$$

可以证明，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$在 $C[0,1]$中是弱无条件收敛的，但它并不无条件收敛.

注 其实，还存在弱无条件收敛而非收敛的级数. 例如，令 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则对任一 $f=\{\xi_n\}\in l$，均有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(e_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<+\infty,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}e_n$在 Banach 空间 c_0中是弱无条件收敛的，但它在 c_0中并不收敛.

5. 某个 Banach 空间中无条件收敛而非绝对收敛的级数.

可以证明，为使 Banach 空间中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是无条件收敛的，当且仅当每个级数$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n x_n$(其中 $\eta_n=0$ 或 1)都收敛. 此外，还容易证明，Banach 空间中绝对收敛的级数必定是无条件收敛的. 然而逆命题并不成立，Thorp[310]有例如下：

在 Banach空间$C[0,1]$中考虑点列$\{x_n\}$：

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{(2n+1)}\text{或}\dfrac{1}{(2n-1)}\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{n}, & t=\dfrac{1}{2n},\\ \text{线性}, & \dfrac{1}{(2n+1)}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2n}\text{或}\dfrac{1}{2n}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{(2n-1)}.\end{cases}$$

易见，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n(t)$在区间[0,1]上是一致收敛的，从而对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$n_0$，当$p,q\geqslant n_0$时就有

$$\sum_{n=p}^{q}x_n(t)<\varepsilon.$$

所以

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{n=p}^{q}\eta_n x_n(t)\right|\leqslant\varepsilon.$$

因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$在$C[0,1]$中是无条件收敛的. 另一方面，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$并不绝对收敛.

注 容易证明，在每个有限维赋范线性空间中，级数的无条件收敛与绝对收敛是相同的. 上述反例表明对于无穷维赋范线性空间而言，级数的无条件收敛推不出绝对收敛. Orlicz 曾经提出如下问题：即这个现象是否可以看作一种规则的出现；是否在每个无穷维 Banach 空间中存在无条件收敛的级数，使它并不绝对收敛? Dvoretzky 与 Rogers[63]最先找到这个问题的肯定回答. 然而，也确实存在无穷维 Fréchet 空间，其中级数的无条件收敛与绝对收敛是等价的(参看第十章例5).

6. 赋范线性空间中 Hamel 基与 Schauder 基互不蕴涵.

第一例　一个 Hamel 基,它不是 Schauder 基.

任取一个具有 Schauder 基的无穷维 Banach 空间. 由于 Schauder基是一个可数点列, 而无穷维Banach空间中的Hamel基是不可数的,因此,这个空间中的任何一个 Hamel 基都不可能是 Schauder基.

第二例　一个 Schauder 基,它不是 Hamel 基.

我们考察 Banach 空间 c_0中的点列$\{e_k\}$,其中

$$e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),$$

并任取 $x=\{a_k\}\in c_0$,则

$$\|x-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|=\sup_{k>n}|a_k|\to 0\ (n\to\infty),$$

故 $x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$.不难看出,这个表示式是唯一的,且因 c_0完备,从而坐标泛函 a_k都是连续的. 因此,$\{e_k\}$是 c_0的 Schauder 基. 另一方面,$\{e_k\}$所张成的线性空间是 E^∞,它是c_0的真子空间,故$\{e_k\}$不是空间c_0 的 Hamel 基.

7. 既是 Hamel 基又是 Schauder 基的无穷点列.

容易证明,对于有限维度量线性空间而言,Schauder 基与Hamel 基的概念是等价的. 对于无穷维度量线性空间而言,这两个概念是不同的. 然而,也存在既是 Hamel 基又是 Schauder 基的无穷点列. 例如,在线性空间 E^∞上取范数

$$\|x\|=\sup_{k\geq 1}|\xi_k|,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in E^\infty$,则 E^∞为一赋范线性空间. 易见,无穷点列$\{e_k\}$既是 E^∞的 Hamel 基,又是 E^∞的 Schauder 基.

注　因为任何一个无穷维 Banach 空间中都不存在可数的 Hamel 基,而线性空间 E^∞中的 Hamel 基是可数的,所以 E^∞上不存在完备范数.

8. 一个有基的 Banach 空间，其共轭空间没有基.

点列$\{e_n\}$是 Banach 空间 l 的基，其中

$$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots).$$

事实上，对 $x=\{\xi_n\}\in l$，有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|\to 0(n\to\infty),$$

故 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$. 又若 $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i e_i$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|=0,$$

因此，$\xi_i=\eta_i$，$i=1,2,\cdots$. 即对任一 $x\in l$，表示式$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$是唯一的，所以$\{e_n\}$是 l 的基. 然而，由于 $l^*=l^\infty$不可分，因而 l^*没有基.

注 Johnson 与 Rosenthal[153]证明了，若 X^*存在基，则X必存在基. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

9. 没有基的可分 Banach 空间.

容易证明，如果 Banach 空间X有基，那么X必定可分. 但反过来是否成立？即有所谓基问题：每个可分 Banach 空间X是否一定有基？

自Banach 于 1932 年提出基问题以后，很多人为解决这一问题作了努力. 由于常见的可分 Banach 空间都找到了基，因而人们曾认为基问题的回答是肯定的，但为此而作的努力都失败了；加之，有的可分 Banach 空间还未找到基，于是人们逐渐倾向于基问题的回答是否定的.

1973年，瑞典数学家 Enflo[93]构造了一个自反可分而没有基

的 Banach 空间，从而基问题的回答是否定的．读者如有兴趣，可参看作者原文．

注 Singer[286]证明了下述定理：若X是 Banach 空间，则X^*有弱*Schauder 基的充要条件是X有基．根据这一定理，立即得知 Enflo 构造的自反可分而没有基的 Banach空间，其共轭空间没有弱*Schauder 基．

10．没有逼近性质的可分 Banach 空间．

基问题(参看例 9)与所谓逼近问题有密切联系：

Banach 空间X称为有逼近性质(AP)，如果对X的每个紧子集K及每个$\varepsilon>0$，存在有限秩线性算子$T:X\to X$(即$Tx=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$，对某组$\{x_i\}_{i=1}^n\subset X$，$\{f_i\}_{i=1}^n\subset X^*$，$\forall x\in X$)，对每个$x\in K$，皆有

$$\|Tx-x\|<\varepsilon.$$

是否每个可分 Banach 空间皆有AP？这就是所谓逼近问题．

可以证明，若 Banach 空间X有基，则X必有 AP．因此，若基问题的回答是肯定的，则逼近问题的回答也是肯定的；若逼近问题是否定的，则基问题也是否定的．

Enflo[99]找到了一个可分自反 Banach 空间不具有 AP，从而也得到了一个可分 Banach 空间未必有基的例子．

11．存在某个 Banach 空间，它有逼近性质而没有有界逼近性质．

Banach空间X称为有λ逼近性质(λ AP)，若对每个紧子集$K\subset X$及每个$\varepsilon>0$，存在有限秩线性算子$T:X\to X$，使$\|T\|\leqslant\lambda$，且对每个$x\in K$，皆有

$$\|Tx-x\|<\varepsilon.$$

Banach 空间X称为有有界逼近性质（BAP），如果对某个λ，它有λ AP. Banach 空间X称为有度量逼近性质(MAP)，如果它有1 AP.

显然，MAP⇒BAP⇒AP.

可以证明，若X是有基的 Banach 空间，则X有 BAP.

应当注意，AP 不蕴涵 BAP. Figiel 和 Johnson[103]利用 Enflo 的反例，构造了一个可分 Banach 空间，它有 AP 而没有 BAP. 读者如有兴趣，可参看作者原文.

12. 存在某个 Banach 空间，它有有界逼近性质而没有度量逼近性质.

Figiel 和 Johnson[103]构造了一个可分 Banach 空间，它有 BAP 而没有 MAP.

下列问题尚未解决：

问题1　是否存在 Banach 空间有 MAP 而没有基？

问题2　若X有 BAP，是否存在一个等价范数$|||\cdot|||$，使$(X, |||\cdot|||)$有 MAP？

问题3　若X是可分的 Banach 空间，且有 BAP，则X是否必有基？

13. 存在某个有基的 Banach 空间X，使X^*可分，但X^*没有逼近性质.

可以证明，若X是 Banach 空间，则X^*有 AP 蕴涵X有 AP. 特别，当X是自反 Banach 空间时，X^*有 AP 当且仅当X有 AP.

对非自反 Banach 空间，X有 AP 不蕴涵X^*有 AP. 其实，存在具有基的Banach空间X，使X^*可分，但X^*没有AP(参看[205]，p.34).

14. 一个赋范线性空间中的基，它不是 Schauder 基.

容易证明，Banach 空间中的基与 Schauder 基彼此是等价的. 然而，不完备赋范线性空间中的基不必是 Schauder 基. 反例如

下：

在线性空间 E^∞ 上取范数

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n|,$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，则 E^∞ 为一不完备的赋范线性空间．令

$$x_1=e_1,x_n=e_1+\frac{e_n}{n},n=2,3,\cdots,$$

则
$$\|x_n-x_1\|=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty),$$

即
$$x_n\to x_1(n\to\infty).$$

兹证 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是空间 E^∞ 的一个基．为此，任取 $x=\{\xi_i\}\in E^\infty$，并设当 $n>r$ 时 $\xi_n=0$．令

$$\alpha_1=\xi_1-\sum_{k=2}^{r}k\xi_k,\alpha_2=2\xi_2,\cdots,$$

$$\alpha_n=n\xi_n,\cdots,$$

则

$$\sum_{k=1}^{r}\alpha_kx_k=(\alpha_1,0,\cdots)+(\alpha_2,\frac{\alpha_2}{2},0,\cdots)+(\alpha_3,0,\frac{\alpha_3}{3},0,$$

$$\cdots)+\cdots+(\alpha_r,0,\cdots,0,\frac{\alpha_r}{r},0,\cdots)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{r}\alpha_k,\frac{\alpha_2}{2},\cdots,\frac{\alpha_r}{r},0,\cdots\right)$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,0,\cdots)=x.$$

换句话说，对每一 $x\in E^\infty$，都可表成

$$x=\sum_{k=1}^{r}\alpha_kx_k$$

的形式．

不难证明，在上述表达式中，系数 α_k 是由 x 唯一确定的．事实上，若 $x=\sum_{k=1}^{r}\beta_kx_k$，则

$$\sum_{k=1}^{r}\beta_k x_k=\left(\sum_{k=1}^{r}\beta_k,\frac{\beta_2}{2},\cdots,\frac{\beta_r}{r},0,\cdots\right)$$
$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r,0,\cdots)=x.$$
由此得到
$$\sum_{k=1}^{r}\beta_k=\xi_1,\frac{\beta_2}{2}=\xi_2,\ \cdots,\ \frac{\beta_r}{r}=\xi_r.$$
从而
$$\beta_1=\xi_1-\sum_{k=2}^{r}\beta_k=\xi_1-\sum_{k=2}^{r}k\xi_k,\beta_2=2\,\xi_2,$$
$$\cdots,\beta_r=r\xi_r.$$
因此，$\alpha_1=\beta_1,\cdots,\alpha_r=\beta_r$，即系数 α_k是由 x 唯一确定的.

综上所述，可见$\{x_n\}$是 E^∞的基.

为证$\{x_n\}$不是 E^∞的 Schauder 基，只要证明坐标泛函 $\alpha_k=f_k(x)$并不都是连续的，其中
$$f_k(x_i)=\begin{cases}1\ , & k=i,\\ 0\ , & k\neq i.\end{cases}$$
其实，f_1并不连续，因为我们在前面已经证明了$x_n\to x_1(n\to\infty)$，而$f_1(x_n)=0,f_1(x_1)=1$，因此，
$$\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)\neq f_1(x_1),$$
即f_1不连续.

15. 某个赋范线性空间的弱 Schauder 基，它不是基.

设X是实Banach 空间 c 的这样的子空间，它由从某项开始为常数的实数列所组成，并用 c 的范数. 显然，c 和X的共轭空间均为 l . 容易看出，单位向量列$\{e_n\}$是X的 弱 Schauder 基. 由于 $x=(1,1,\cdots)\in X$，它不属于$\{e_n\}$ 按范数拓扑张成的闭线性子空间，故$\{e_n\}$不是X的基.

注 可以证明，若X是 Banach 空间，则点列$\{x_n\}$是X的 Sch-

auder 基，当且仅当它是X的弱 Schauder 基. 上述反例表明，对于赋范线性空间而言，这一命题并不成立.

16. 某个共轭空间X^*的基，它在X中没有双直交列.

如果$\{x_n\}$是 Banach 空间X的基，那么对每一$x\in X$，存在唯一的数列$\{\alpha_n\}$，使

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n.$$

令$\alpha_n=f_n(x)$，则f_n是X上的有界线性泛函，且

$$f_n(x_m)=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

也就是说，对于每个基$\{x_n\}\subset X$，在X^*中都存在$\{f_n\}$，使$\{x_n\}$与$\{f_n\}$成双直交列. 应当注意，对于X^*中的基$\{f_n\}$，在X中不必存在$\{x_n\}$，使$\{x_n\}$与$\{f_n\}$成双直交列. 例如，取$X=c_0$，则$X^*=l$. 令$f_1=e_1, f_n=e_n-(-1)^{n-1}e_1, n=2,3,\cdots$. 又对任一$f=\{\eta_n\}\in l$，令

$$\alpha_1=\eta_1, \alpha_2=\eta_2+\eta_1, \alpha_3=\eta_3-\eta_1,\cdots,$$
$$\alpha_n=\eta_n+(-1)^n\eta_1,\cdots$$

则
$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n.$$

易见，这个表示法是唯一的，因此，$\{f_n\}$是$X^*=l$的一个基. 然而，在$X=c_0$中不存在与$\{f_n\}$成双直交的点列$\{x_n\}$.

17. 一个双直交点列$\{x_n\}$与$\{f_n\}$，使$\{x_n\}$是基而$\{f_n\}$不是基.

Karlin[169] 证明了下述命题：设$\{x_n\}$是 Banach 空间X中的一个点列，$\{f_n\}\subset X^*$且与$\{x_n\}$成双直交点列. 若$\{f_n\}$是X^*的基，则$\{x_n\}$必是X的基. 应当注意，这个命题之逆并不成立，反例如下：

设$X=l$，$\{e_n\}$是l的自然基. 于是，对任一$x\in l$，存在唯一的

数列$\{a_n\}$，使

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n.$$

令 $a_n=f_n(x)$，则 f_n 是 l 上的有界线性泛函，即 $f_n\in l^\infty$，且

$$f_n(e_m)=\begin{cases}1, & n=m,\\0, & n\neq m.\end{cases}$$

即$\{f_n\}$与$\{e_n\}$成双直交点列．由于 l^∞ 不可分，因而$\{f_n\}$不可能是 $X^*=l^\infty$的基．

注 可以证明，若$\{x_n\}$是 Banach 空间X的基，则相应的坐标泛函列$\{f_n\}$是 X^*的基的充要条件是$\{x_n\}$ 为X的收缩基．上述反例也说明了$\{e_n\}$不是 l 的收缩基．其实，l 中根本不存在收缩基．

18．某个Banach 空间中的基序列，它的坐标泛函列不是基序列．

可以证明，如果$\{x_n\}$是 Banach 空间X的基，那么坐标泛函列$\{f_n\}$必是 X^*中的基序列，即$\{f_n\}$是$\overline{\text{span}}\{f_n\}$的基．于是，自然会提出下述问题：如果$\{x_n\}$是 Banach 空间$X$中的基序列，那么相应的坐标泛函列是否必为 X^*的基序列？Davis[75] 等人否定地回答了这个问题．他们的例子如下：

设 $\mathbf{R}^1$为一维欧氏空间，对$(x,y)\in l^2\oplus\mathbf{R}^1$，令

$$\|(x,y)\|=(\|x\|_{l^2}^2+|y|_{\mathbf{R}^1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

则$(l^2\oplus\mathbf{R}^1,\|\cdot\|)$为 Banach 空间．取 $x_n=(e_n,0)\in l^2\oplus\mathbf{R}^1$，$f_n=(e_n,1)\in(l^2\oplus\mathbf{R}^1)^*=l^2\oplus\mathbf{R}^1$，则$\{x_n\}$与$\{f_n\}$是双直交列．任取$x\in\overline{\text{span}}\{x_n\}$，则 x 可表成

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$$

的形式，而且系数a_i显然是由 x 唯一确定的．因此，$\{x_n\}$是$l^2\oplus\mathbf{R}^1$

中的一个基序列．另一方面，

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|^2 = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} e_j, n\right)\right\|^2 = n + n^2,$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=n+1}^{2n} f_i\right\|^2 = \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} e_i - \sum_{j=n+1}^{2n} e_j, 0\right)\right\|^2$$

$$= 2n,$$

由此得到

$$\frac{\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=n+1}^{2n} f_i\right\|}{\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|} = \left(\frac{2}{(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 (n \to \infty).$$

这就说明了$\overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$到$\overline{\text{span}}\{f_1, \cdots, f_k\}$上的自然射影不是一致有界的，因而$\{f_n\}$不是$(l^2 \oplus \mathbf{R}^1)^*$中的基序列（参看[205]，pp.1—2）．

注 可以证明，每个无穷维 Banach 空间 X 都含有基序列，使相应的坐标泛函列是 X^*的基序列(参看[75])．

Eberlein[94] 指出，每个非自反的 Banach 空间都包含一个可分的非自反子空间．

Banach[37] 指出，每个 Banach 空间都包含一个具有基的子空间．

于是便产生问题：是否每个非自反的 Banach 空间都包含一个具有基的非自反子空间？

19．某个 Banach 空间的稠密子空间的基，它不是整个空间的基．

Krein-Milman-Rutman 定理是说：若 Banach 空间 X 具有基，则 X 的每个稠密子集 E 中必有 X 的基．但是，我们应当注意，

X的稠密子空间的基，未必是X的基．例如，对$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，令

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n|,$$

则E^∞是Banach空间c_0的稠密子空间．令

$$x_1=e_1,x_n=e_1+\frac{e_n}{n},n=2,3,\cdots,$$

则$\{x_n\}$是E^∞的一个基(参看例14)．但它不是c_0的基．事实上，取$x=\left\{\frac{1}{n}\right\}\in c_0$，此时不存在数列$\{\alpha_n\}$使

$$x=\sum_{i=1}^\infty\alpha_i x_i,$$

这是因为

$$\sum_{k=1}^n\alpha_k x_k=\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k,\frac{\alpha_2}{2},\cdots,\frac{\alpha_n}{n},0,\cdots\right),$$

如果$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\alpha_k x_k$，那么将有

$$\sum_{k=1}^\infty\alpha_k=1,\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=\cdots=1,$$

这当然是荒谬的．因此，$\{x_n\}$不是c_0的基．

注　Bessaga和Pelczyński[41]指出，不能把Krein-Milman-Rutman定理推广到B_0空间．他们构造了一个具有基的B_0空间X，以及X的一个稠密的线性子空间M，使M中不存在X的基．

20．一个赋范线性空间中的基$\{x_n\}$，它有子列$\{x_{n_k}\}$，使$\{x_{n_k}\}$不是基序列．

可以证明，若$\{x_n\}$是Banach空间X的基，$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子列，则$\{x_{n_k}\}$必为X的基序列．应当注意，在这个命题中空间X为完备的条件不可去掉．例如，在线性空间E^∞上取范数

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n|,$$

其中$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$. 令

$$x_1=e_1, x_n=e_1+\frac{e_n}{n}, n=2,3,\cdots,$$

则$\{x_n\}$是 E^∞ 的一个基.

兹证$\{x_n\}$的子列$(x_2,x_3,\cdots)$不是$\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=2}^\infty$的基.

据$\{x_n\}_{n=1}^\infty$的定义,$\{x_n\}_{n=2}^\infty$的线性闭包$\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=2}^\infty$是包含基$\{x_n\}_{n=1}^\infty$的最小闭线性子空间. 由于$\{x_n\}_{n=1}^\infty$是$E^\infty$的基,因而包含基$\{x_n\}_{n=1}^\infty$的最小闭线性子空间就是$E^\infty$. 然而,$\{x_n\}_{n=2}^\infty$不是$E^\infty$的基,故$\{x_n\}_{n=2}^\infty$不是$\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=2}^\infty$的基.

21. 存在点列$\{x_n\}$,它是 Banach 空间$(X,\|\cdot\|_X)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$的基,但不是$(X\cap Y,\|\cdot\|=\|\cdot\|_X+\|\cdot\|_Y)$的基.

Wilansky[334] 提出如下问题: 若$\{x_n\}$是 Banach 空间$(X,\|\cdot\|_X)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$的基,则它是否必为$(X\cap Y,\|\cdot\|=\|\cdot\|_X+\|\cdot\|_Y)$的基?

Pryce[240] 指出,这个问题的答案是否定的. 他的例子如下:

设 $X=l^2, Y_0=l$,则X与Y_0都是具有基的 Banach 空间. 设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别是X与Y_0中的自然基,即$x_n=y_n=e_n$, $n=1,2,\cdots$. 令M是由基$\{x_n\}$的一切有限线性组合所构成的X的子空间. 因X与Y_0都是无穷维可分的 Banach 空间,故它们的 Hamel 基的势均为$\aleph$. 于是据Zorn引理,存在由Y_0到X上的一对一的线性映射T,使对每一n,有$Ty_n=x_n$. 设$Y=X$, 则对每一$x=\{\xi_n\}\in Y$,存在唯一的$y=\{\eta_n\}\in Y_0$与之对应. 我们在Y上取范数

$$\|x\|_Y=\sum_{n=1}^\infty|\eta_n|,$$

则$(Y,\|\cdot\|_Y)$显然为 Banach 空间. 因T是由Y_0到Y上的一对一的线性映射,而$\{y_n\}$是Y_0的基,故$\{x_n\}$是Y的基. 因此,$\{x_n\}$既是$(X,\|\cdot\|_X)$的基,又是$(Y,\|\cdot\|_Y)$的基.

任取 $u\in M$，则 u 可表成 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ 的形式，且

$$\|u\|_X=\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=\|u\|_Y.$$

由此可见，M 中的每个点列，如果它是 $(Y,\|\cdot\|_Y)$ 中的 Cauchy 点列，那么它也是 $(X,\|\cdot\|_X)$ 中的 Cauchy 点列. 任取 $z\in X$，则 z 可唯一地表成

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ix_i,$$

这里，级数的和是在范数 $\|\cdot\|_Y$ 意义之下的.

因为这个级数的部分和点列是 M 中的 Cauchy 点列，所以它在范数 $\|\cdot\|_X$ 之下也收敛，设其和为 y，我们指出，z 与 y 不必相等. 事实上，如果对每一个 $z\in X$，对应的 y 都与 z 相等，那么由闭图象定理可知，范数 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$ 将是等价的，从而 l^2 与 l 将是线性同胚的. 于是，它们或者都是自反的，或者都不是自反的，这显然是荒谬的.

今取 $z\in X$，使对应的 y 与 z 不相等. 于是，对任何数列 $\{\lambda_i\}$，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ix_i$ 不可能在范数 $\|\cdot\|_X+\|\cdot\|_Y$ 之下收敛于 z，即 $\{x_n\}$ 不是 $X\cap Y$ 的基.

22. 一个Banach空间的基 $\{x_n\}$，使基序列 $\{x_{2k}\}$ 等价于基 $\{x_n\}$，但 $\{f_{2k}\}$ 并不等价于 $\{f_n\}$，这里，$\{f_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的坐标泛函列.

可以证明，如果 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别是 Banach 空间 X 与 Y 中的无条件基，$\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 分别是 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的坐标泛函列，则对任一递增的正整数列 $\{n_k\}$，基序列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_n\}$ 等价当且仅当基序列 $\{f_{n_k}\}$ 与 $\{g_n\}$ 等价.

应当注意，在这个命题中无条件基的条件不可去掉. Кадец 和Pelczyński[160]有例如下：

在 Banach 空间 c 中考虑基$\{x_n\}$，这里

$$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty},\quad \xi_i^{(n)}=\begin{cases}0, i<n,\\ 1, i\geqslant n.\end{cases}$$

于是，$\{x_n\}$在 $c^*=l$ 中的坐标泛函列是$\{f_n\}$，这里$f_n=\{\eta_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$，而

$$\eta_i^{(1)}=\begin{cases}1, & i=1,\\ 0, & i>1,\end{cases}$$

$$\eta_i^{(n)}=\begin{cases}-1, & i=n-1,\\ 1, & i=n, n=2,3,\cdots\\ 0, & \text{其它的 } i.\end{cases}$$

令 $n_k=2k, k=1,2,\cdots$，不难看出，基序列$\{x_{2k}\}$等价于基$\{x_n\}$。然而，由于$\{f_{2k}\}$等价于 l 中的自然基$\{e_n\}$，而$\{e_n\}$不等价于$\{f_n\}$，因而$\{f_{2k}\}$也不等价于$\{f_n\}$。

23．有弱*基而没有基的共轭空间．

设 $X=l$，则 $X^*=l^\infty$．由于 l^∞不可分，因而 X^*没有基．另一方面，令

$$f_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots).$$

则 $f_n\in l^\infty$．任取 $f=\{\eta_n\}\in l^\infty$ 及 $x=\{\xi_n\}\in l$，据 l 上有界线性泛函的一般形式，我们有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n.$$

因此，$f_n(x)=\xi_n, n=1,2,\cdots$．即对任一 $x=\{\xi_n\}\in l$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n f_n(x)=f(x).$$

因为$\{\eta_n\}$是由 $f\in l^\infty$唯一确定的，所以$\{f_n\}$是X^*中的弱*基．

注　这个例子也说明了共轭空间中的弱*基不必是基．

24．存在某个 Banach 空间的共轭空间，它有弱*基而并不可分．

取 $X=l$，则 $X^*=l^\infty$. 令 $f_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，则$\{f_n\}$是$X^*$的一个弱*基(参看例 23)，但$X^*$并不可分.

25. 某个 Banach 空间的共轭空间中的 Schauder 基，它不是弱*基.

Bessaga 和 Pelczyński[41] 证明了下述定理：设X^*是 Banach 空间X的共轭空间. 若$\{f_n\}$是X^*的弱*基，并且在范数拓扑下，$\overline{\text{span}}\{f_n\}=X^*$，则$\{f_n\}$是$X^*$在范数拓扑下的基，从而它是$X^*$的 Schauder基.

Singer[289]指出，这个定理之逆并不成立，即X^*中的Schauder基不必是弱*基. 他的例子如下：设$X=c_0$，$\{e_n\}$是$X^*=l$的自然基. 令

$$h_1=e_1,h_n=e_n-e_{n-1},n=2,3,\cdots.$$

则$\{h_n\}\subset X^*$，且$\{h_n\}$是X^*在范数拓扑下的基(参看[287])，从而它是X^*的 Schauder 基.

兹证$\{h_n\}$不是X^*的弱*基. 反设$\{h_n\}$是X^*的弱*基，那么对每一$f\in X^*$，都有弱*表达式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i h_i(x),\tag{1}$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in X=c_0$ 是任意的. 据 h_i 的定义，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}h_i(x)=e_n(x)$$

从而对任意$x\in X$，都有$\sum_{i=1}^{\infty}h_i(x)=0$，这就说明了弱*表达式(1)不是唯一的. 因此，$\{h_n\}$不是$X^*$的弱*基.

26. 一个 Banach 空间的共轭空间中的弱*基，它不是弱* Schauder基.

可以证明，Banach 空间中的每个基必是 Schauder 基. 又，

Banach 空间中的每个弱基必是弱 Schauder 基。然而，其共轭空间中的弱*基不必是弱*Schauder 基。Singer[286]有例如下：设 $X=c_0$，$\{e_n\}$是 $X^*=l$ 的自然基。令

$$f_1=e_1,\ f_n=(-1)^{n+1}e_1+e_n,\ n=2,3,\cdots \tag{1}$$

可以证明，$\{f_n\}$是 X^*在范数拓扑下的基。于是，由 X^* 的完备性可知，$\{f_n\}$是 X^*的 Schauder 基。事实上，设$\{g_n\}\subset X^{**}$ 是 X^*的基$\{e_n\}$的双直交泛函列，并令

$$h_1(f)=g_1(f)+\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j g_j(f),\ f\in X^*,\ h_n=g_n,\ n=2,3,\cdots \tag{2}$$

则$\{h_n\}$与$\{f_n\}$成双直交列，且有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} h_i(f)f_i&=\left[\ g_1(f)+\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j g_j(f)\ \right]e_1+\\&\quad+\sum_{j=2}^{n} g_j(f)[(-1)^{j+1}e_1+e_j]\\&=\sum_{j=1}^{n} g_j(f)e_j+\left[\ \sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^j g_j(f)\ \right]e_1\\&\qquad(f\in X^*,\ n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由于 $f=\sum_{j=1}^{\infty}g_j(f)e_j$，因而

$$\sum_{j=1}^{\infty}|g_j(f)|<+\infty,\ f\in X^*=l.$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$ 及 $f\in X^*$，存在正整数 $n_0=n_0(\varepsilon,f)$，当 $n>n_0$ 时就有

$$\left\|\ \sum_{j=1}^{n}h_j(f)f_j-\sum_{j=1}^{n}g_j(f)e_j\right\|<\varepsilon.$$

因此，对任意 $f\in X^*$，都有

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}h_j(f)f_j.$$

故$\{f_n\}$是 X^* 的基.

兹证$\{f_n\}$是 X^* 的弱*基. 前面已证对任意 $f\in X^*$，都有

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}h_j(f)f_j.$$

因此，对每一 $f\in X^*$，也有弱*表达式

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}h_j(f)f_j(x),x\in X.$$

容易证明，这个表达式是唯一的. 其实，假定对于数列$\{\alpha_n\}$而有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j f_j(x)=0,x\in X. \tag{3}$$

设$\{b_n\}$是 $X=c_0$ 的自然基. 若取 $x=b_n, n=1,2,\cdots$，则由 (1) 式得到

$$f_j(b_1)=(-1)^{j+1},$$

$$f_j(b_n)=\begin{cases}1, & j=n,\\ 0, & j\neq n,\end{cases}\quad n=2,3,\cdots;j=1,2,\cdots.$$

再由(3)，对 $x=b_n, n=1,2,\cdots$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\alpha_j=0,\alpha_2=\alpha_3=\cdots=0.$$

所以 $\alpha_n=0, n=1,2,\cdots$. 因此，$\{f_n\}$是 X^* 的弱*基.

最后，我们证明$\{f_n\}$不是 X^* 的弱*Schauder 基. 为此，我们用 π 代表由 X 到 X^{**} 内的典则映射. 据(2)，$h_1\notin\pi(X)$. 因此，h_1 不是弱*连续的，从而$\{f_n\}$不是 X^*的弱*Schauder 基.

注 Kalton[166]指出，当 X 是 $L(\mu)$(对某个测度 μ) 的子空间

时，X^*中的弱*基必是弱*Schauder 基. 他还提出下述问题：如果X只是弱序列完备的 Banach 空间，那么 X^* 中的弱* 基是否必为弱*Schauder 基？

27. 一个共轭空间中的弱*Schauder 基，它不是 Schauder 基.

可以证明，Banach 空间中的弱 Schauder 基与 Schauder 基是等价的. 但是，共轭空间中的 Schauder 基不必是弱* Schauder 基（参看例 25）；而弱*Schauder 基也不必是 Schauder 基. 例如，取 $X=l, X^*=l^\infty$. 显然，$\{e_n\}$是 X^*中的弱* Schauder 基，但它不是 X^* 中的基.

注 (i) 对于 Banach 空间而言，基、Schauder 基、弱基和弱 Schauder 基的概念彼此都是等价的. (ii) 对于不完备的赋范线性空间而言，基不必是 Schauder 基（例 14）；弱Schauder 基不必是基（例 15）. (iii) 对于 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 而言，X^*中的 Schauder 基不必是弱*基（例 25）；反过来也一样（例 27）. 又，X^* 中的弱*基不必是弱* Schauder 基（例 26）.

28. 一个 Banach 空间的共轭空间，它弱*可分而没有弱*基.

容易证明，若 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 中有弱* 基，则 X^*必定弱*可分. Singer[236] 指出，这个命题之逆并不成立. 他的例子如下：取 $X=l^\infty$，则 $X^*=(l^\infty)^*$. 对 $x=\{\xi_n\}\in X$，令 $f_n(x)=\xi_n$. 显然，$\{f_n\}\subset X^*$，且$\{f_n\}$的弱*闭线性包就是 X^*，故 X^*是弱*可分的.

兹证 X^* 中不存在弱* 基. 如果 X^* 中存在弱*基$\{f_n\}$，那么对每一 $f\in X^*$，存在唯一的数列$\{\alpha_n\}$，使对任一$x\in X$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right]=0.$$

因 $X^*=(l^\infty)^*$中点列的弱*收敛与弱收敛是等价的（参看第四章例 34），故对任一 $F\in(l^\infty)^{**}$，也有

$$\lim_{n\to\infty} F\left(f-\sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right)=0.$$

这就说明了 $(l^\infty)^*$ 是弱可分的，从而 $(l^\infty)^*$ 是可分的（参看[37]，p. 134）。然而这是不可能的，因为 l^∞ 并不可分。因此，$(l^\infty)^*$ 中不存在弱*基。

注 Singer[286] 还构造了一个弱*序列可分而没有弱* Schauder 基的共轭空间。

下述问题是没有解决的：弱*序列可分的共轭空间是否必有弱*基？

29. 一个共轭空间 X^* 中的点列，它既是 X^* 的基，又是 X^* 的弱*基，但它并不弱*收敛于 0.

易证，若$\{x_n\}$是无穷维 Banach 空间 X 的基，且 $\inf\limits_{1\leqslant n<+\infty}\|x_n\|>0$，又$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的双直交泛函列，则$\{f_n\}$弱*收敛于 0.

由于上述命题，我们自然会提出下述问题：若$\{f_n\}$是共轭 Banach 空间 X^* 的基或是弱*基，那么$\{f_n\}$是否一定弱*收敛于 0？下面的例子将说明这个问题的答案是否定的.

取 $X=c_0, X^*=l$. 令

$$f_1=e_1, f_n=(-1)^{n+1}e_1+e_n, n=2,3,\cdots,$$

则$\{f_n\}$既是 X^* 的基，又是 X^* 的弱*基. 然而，对于 $x=(1,0,0,\cdots)\in X$ 而言，我们有

$$f_1(x)=1, f_n(x)=(-1)^{n+1}, n=2,3,\cdots.$$

因此，$\{f_n\}$并不弱*收敛于零.

注 若$\{f_n\}$是 X^* 的基且$\{f_n\}$弱*收敛于 0，也不能保证$\{f_n\}$是 X^*的弱*基（参看[290]，p. 299）.

30. 一个有基的 Banach空间，它没有单调基.

考虑 Banach 空间 $C[0,1]$. 令

$$x_n(t)=t^n,\quad t\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots.$$

我们可以选取$\{x_n\}$的一个这样的子列$\{x_{n_k}\}$，它是X的一个基序列，而由$\{x_{n_k}\}$张成的闭子空间X_0没有单调基（证明细节可参看[290]，p.p. 241—248）。

31. 一个 Banach 空间的有界完全基，它的一个基序列却不是有界完全的.

Davis 和 Singer[76]指出，对于 Banach 空间中的有界完全基，它的基序列不必是有界完全的. 他们的例子如下：设 $X=c_0$，令

$$x_{2n-1}=e_{2n-1}-2^n e_{2n}+2^{n+1}e_{2n+2}, n=1,2,\cdots,$$

$$x_{2n}=2^n e_{2n}, n=1,2,\cdots;$$

$$f_{2n-1}=b_{2n-1}, n=1,2,\cdots,$$

$$f_2=b_1+\frac{b_2}{2},$$

$$f_{2n}=-b_{2n-3}+b_{2n-1}+\frac{b_{2n}}{2^n},\ n=2,3,\cdots.$$

这里，$\{e_n\}$是c_0的自然基，而$\{b_n\}$是相应的坐标泛函列，因而

$$b_i(e_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

由此可知，$\{x_n\}$与$\{f_n\}$成双直交列. 此外，由于

$$e_{2n}=\frac{x_{2n}}{2^n},$$

$$e_{2n-1}=x_{2n-1}+x_{2n}-x_{2n+2},\quad n=1,2,\cdots,$$

且$\overline{\text{span}}\{e_n\}=X$，故$\overline{\text{span}}\{x_n\}=X$. 类似地，由于

$$b_{2n-1}=f_{2n-1}, b_2=2(f_2-f_1),$$

$$b_{2n}=2^n(f_{2n}-f_{2n-1}+f_{2n-3}), n=2,3,\cdots,$$

且$\overline{\text{span}}\{b_n\}=X^*$，故$\overline{\text{span}}\{f_n\}=X^*$.

易见，$\{x_n\}$与$\{f_n\}$分别是X与X^*的基. 于是，$\{f_n\}$必是X^*

中的有界完全基(参看[290],p.p. 286—287)。

兹证，$\{f_n\}$的子列$\{f_{2n}\}$是一个基序列，它不是有界完全的。事实上，我们有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_{2i}\right\| = \left\| b_1 + \frac{b_2}{2} + \sum_{i=2}^{n}\left(-b_{2i-3} + b_{2i-1} + \frac{b_{2i}}{2^i}\right)\right\|$$

$$= \left\| b_{2n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{2i}}{2^i} \right\| = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},$$

因而 $\sup\limits_n \left\|\sum_{i=1}^{n} f_{2i}\right\| = 2$。另一方面，由于$\|f_{2n}\|>1$，$n=1,2,\cdots$，因而$\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i}$不收敛。这就证明了基序列$\{f_{2n}\}$不是有界完全的。

32．一个双直交列$\{x_n\}$与$\{f_n\}$，使$\{f_n\}$是有界完全的基序列，而$\{x_n\}$却不是收缩的基序列。

可以证明，若X是 Banach 空间，X^* 为其共轭空间，则$\{x_n\}$为X的收缩基的充要条件是$\{f_n\}$为X^*的有界完全的基序列；$\{x_n\}$为X的有界完全基的充要条件是$\{f_n\}$为X^*的收缩的基序列，其中$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的坐标泛函列(参看[290]，pp. 286--287)。

Davis, Dean 和 Bor-Luh-Lin[75]指出，当$\{x_n\}$是基序列时，相应的命题就不再成立。他们的例子如下：

设$\{e_n\}$是c_0中的自然基，$\{b_n\}$是l中的自然基。在$c_0\oplus c_0$中取$x_n=(e_n, e_1+\cdots+e_n)$，在$(c_0\oplus c_0)^*=l\oplus l$中取$f_n=(b_n, 0)$。不难看出，$\{x_n\}$与$\{f_n\}$分别是$c_0\oplus c_0$与$l\oplus l$中的基序列，这里，取范数为

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

或

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

任取实数列$\{\alpha_n\}$，使$\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|\right\}$有界，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|_{l\oplus l}=\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i,0\right)\right\|_{l\oplus l}$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\right\|_{l}=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|<+\infty,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

由此可知，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i$收敛，从而$\{f_i\}$是有界完全的．另一方面，若取

$$g=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}(0,b_n)\in l\oplus l,$$

则有

$$g(x_k)=\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\to 1(k\to\infty).$$

因此，$\{x_n\}$不是收缩的．

33．一个双直交列$\{x_n\}$与$\{f_n\}$，使$\{f_n\}$是收缩的基序列，而$\{x_n\}$却不是有界完全的基序列．

设$\{e_n\}$，$\{b_n\}$与$\{\delta_n\}$分别是 Banach 空间 c_0，l 和 l^2 中的自然基．在 $c_0\oplus l^2$ 中取 $x_n=(e_n,2^{-n}\delta_n)$，在$(c_0\oplus l^2)^*=l\oplus l^2$ 中取 $f_n=(0,2^n\delta_n)$．易见，双直交列$\{x_n\}$与$\{f_n\}$分别是 $c_0\oplus l^2$ 与 $l\oplus l^2$ 中的基序列。此外，

$$\overline{\text{span}}\{f_n\}=\{0\}\oplus l^2.$$

任取 $f=(0,(\xi_1,\xi_2,\cdots))\in(\{0\}\oplus l^2)^*=\{0\}\oplus l^2$．设 $x\in\overline{\text{span}}\{f_{n+1},f_{n+2},\cdots\}$，则 x 可表成下列形式：

$$x=(0,(0,\cdots,0,2^{n+1}\eta_{n+1},2^{n+2}\eta_{n+2},\cdots)).$$

因 $x\in\{0\}\oplus l^2$，故 $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|2^i\eta_i|^2\to 0(n\to\infty)$，从而

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\ \|x\|$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|2^i\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0(n\to\infty).$$

由此得到

$$P_n(f)=\sup\{f(x):x\in\overline{\text{span}}\{f_{n+1},f_{n+2},\cdots\},\|x\|\leqslant 1\}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

即$\{f_n\}$是$\{0\}\oplus l^2$的收缩基．另一方面，基序列$\{x_n\}$不是有界完全的．

注　这个例子也是由 Davis，Dean 和 Bor-Luh-Lin[75] 作出的．

34．一个 Banach 空间中的基，它不是正规基．

赋范线性空间X的基$\{x_n\}$称为正规化的，是指$\|x_n\|=1,n=1,2,\cdots$；$\{x_n\}$称为正规的，是指$\|x_n\|=\|f_n\|=1,n=1,2,\cdots$，其中$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的坐标泛函列．

考虑 Banach 空间 $X=C[0,1]$．令

$x_0(t)=1,x_1(t)=t,$

$$x_{2^k+l}(t)=\begin{cases}0, & t\notin\left(\dfrac{2l-2}{2^{k+1}},\ \dfrac{2l}{2^{k+1}}\right),\\ 1, & t=\dfrac{2l-1}{2^{k+1}}\\ \text{线性}, & t\in\left[\dfrac{2l-2}{2^{k+1}},\ \dfrac{2l-1}{2^{k+1}}\right]\\ & \text{或 } t\in\left[\dfrac{2l-1}{2^{k+1}},\ \dfrac{2l}{2^{k+1}}\right],\end{cases}$$

其中 $l=1,2,\cdots,2^k;k=0,1,2,\cdots$．

可以证明，$\{x_n\}$是$C[0,1]$中的基（参看[290]，p.p. 11—13）．

显然，坐标泛函列为

$$f_0(x)=x(0),\quad f_1(x)=x(1)-x(0),$$

$$f_{2^k+l}(x)=x\left(\frac{2l-1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{2}x\left(\frac{2l-2}{2^{k+1}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}x\left(\frac{2l}{2^{k+1}}\right),$$

其中 $x\in C[0,1]$，$l=1,2,\cdots,2^k$；$k=0,1,2,\cdots$. 由于 $\|f_0\|=1$，$\|f_n\|=2$，$n=1,2,\cdots$，因而$\{x_n\}$不是 $C[0,1]$中的正规基.

注 Banach 空间 $C[0,1]$中是否存在正规基？这是尚未解决的一个问题.

Samn[274]引入了 Banach 空间中半正规基的概念，并指出，每个正规基必是半正规基，其逆不真. 他还在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中构造了一个半正规基.

35. 一个 Banach 空间的非正规基$\{x_n\}$，使坐标泛函列 $\{f_n\}$ 是 $\overline{\text{span}}\{f_n\}$的正规基.

可以证明，若$\{x_n\}$是 Banach 空间X的正规基，则$\{f_n\}$必是$\overline{\text{span}}\{f_n\}$的正规基，其中$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的坐标泛函列（参看［290］，p.p.260—261）. 应当注意，这个命题之逆并不成立. 反例如下：

取 $X=c_0$，$\{e_n\}$是X的自然基. 令

$$x_n=(2,2,\cdots,2,0,0,\cdots),$$

即$x_n=\sum_{i=1}^{n}2e_i$. 显然，$\{x_n\}$是X的基. 由于$\|x_n\|=2$，因而$\{x_n\}$不是X的正规基.

兹证$\{f_n\}$是$\overline{\text{span}}\{f_n\}$的正规基. 事实上，我们有

$$f_n=\Big(0,\cdots,0,\underset{\text{第}n\text{位}}{\frac{1}{2}},\frac{-1}{2},0,\cdots\Big).\qquad(1)$$

因此，$\|f_n\|=1$. 此外，关于$\overline{\text{span}}\{f_n\}$的基$\{f_n\}$的坐标泛函列是$\{\varphi(x_n)\}$，其中 φ 是由 X 到$(\overline{\text{span}}\{f_n\})^*$内的典则映射. 据(1)，有

$$\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}=\{f=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l:\ \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i=0\}.$$

因此，对任何满足条件$\|f\|\leqslant 1$的$f=\{\eta_n\}\in\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}$，都有

$$|f(x_n)|=\left|\sum_{i=1}^{n}2\eta_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i-\sum_{i=n+1}^{\infty}\eta_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|=\|f\|\leqslant 1,n=1,2,\cdots.$$

于是，

$$\|\varphi(x_n)\|=\sup_{\substack{\|f\|\leqslant 1\\ f\in\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}}}|f(x_n)|\leqslant 1,n=1,2,\cdots.$$

另一方面，由于$f_n\in\overline{\operatorname{span}}\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$，$\|f_n\|=1$，因而

$$\|\varphi(x_n)\|\geqslant|\varphi(x_n)(f_n)|=|f_n(x_n)|=1,$$
$$n=1,2,\cdots.$$

因此$\|\varphi(x_n)\|=1,n=1,2,\cdots$. 这就证明了$\{f_n\}$是$\overline{\operatorname{span}}\{f_n\}$的正规基.

关于正规基，下述问题尚未解决：

问题1　具有基的无穷维 Banach 空间是否必有正规基？

问题2　具有基的无穷维自反 Banach 空间是否必有正规基？

36. 一个 Banach 空间的 Bessel 基，它不是 Hilbert 基.

Banach 空间l中的自然基$\{e_n\}$是 Bessel 基，但它不是 Hilbert 基.

37. 一个 Banach 空间的 Hilbert 基，它不是 Bessel 基.

Banach 空间c_0中的自然基$\{e_n\}$是 Hilbert 基，但它不是 Bessel 基.

38. 一个 Banach 空间的基，它不是无条件基.

以$\{e_n\}$代表 Banach 空间c_0中的自然基. 令

$x_n=e_1+\cdots+e_n=(1,\cdots,1,0,\cdots)$。显然，$\{x_n\}$是 c_0 的基．另一方面．因为

$$\sum_{i=m}^{m+p}\alpha_i x_i=\sum_{i=m}^{m+p}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{i}e_j\right)$$

$$=\left(\sum_{i=m}^{m+p}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}e_j\right)+\left(\sum_{i=m+1}^{m+p}\alpha_i\right)e_{m+1}$$

$$+\cdots+\alpha_{m+p}e_{m+p},$$

所以 $\left\|\sum_{i=m}^{m+p}\alpha_i x_i\right\|=\sup\limits_{m\leqslant k\leqslant m+p}\left|\sum_{i=k}^{m+p}\alpha_i\right|$.

于是，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$收敛当且仅当级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$收敛．若取数列$\{\varepsilon_i\}$，$\varepsilon_i=\pm1$，使$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\alpha_i$不收敛，则$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\alpha_i x_i$也不收敛．因此，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$并非无条件收敛，从而$\{x_n\}$不是 c_0中的无条件基.

注 Альтман[30]构造了 Hilbert 空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的双直交列$\{f_n\}$与$\{g_n\}$：

$$f_0=\frac{|x|^{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$f_1=\frac{|x|^{\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cos x,$$

$$f_2=\frac{|x|^{-\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sin x,\cdots,$$

$$f_{2m+1}=\frac{|x|^{\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cos(m+1)x,$$

$$f_{2m+2}=\frac{|x|^{-\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sin(m+1)x,\cdots,$$

$$m=0,1,2,\cdots;$$

$$g_0=\frac{|x|^{-\alpha}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$g_1=\frac{|x|^{-\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cos x,$$

$$g_2=\frac{|x|^{\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sin x,\cdots,$$

$$g_{2m+1}=\frac{|x|^{\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cos(m+1)x,$$

$$g_{2m+2}=\frac{|x|^{\alpha}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\sin(m+1)x,\cdots,$$

$$m=0,1,2,\cdots;$$

其中 $0<\alpha<\frac{1}{2}$. 他证明了 $\{f_n\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的基，但既不是 Bessel 基，也不是 Hilbert 基.

Gelbaum[112]进一步指出，$\{f_n\}$也不是 $L^2[-\pi,\pi]$中的无条件基. 为此，先证明

$$\liminf_{n\to\infty}\|f_n\|>0.$$

事实上
$$\|f_{2m+1}\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{2\alpha}\cos^2(2m+1)xdx,$$

$$\|f_{2m+2}\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{-2\alpha}\sin^2(m+1)xdx,$$

于是得到

$$\|f_{2m+1}\|^2=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{2\alpha}dx\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{2\alpha}\cos 2(m+1)x\,dx\right\},$$

$$\|f_{2m+2}\|^2=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{-2\alpha}dx\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{-2\alpha}\cos 2(m+1)x\,dx\right\}.$$

据 Riemann-Lebesgue 引理，上述等式的第二个积分趋于零，而第一个等式的第一个积分值是$\frac{2\pi^{2\alpha+1}}{(1+2\alpha)}$，第二个等式的第一个积分值是$\frac{2\pi^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)}$，因而

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|f_n\|>0.$$

再证$\{f_n\}$不是$L^2[-\pi,\pi]$中的无条件基. 为此，我们先陈述 Gelbaum[111]的关于 Hilbert 空间无条件基的特征的命题如下：

命题 设$\{x_n\}$是 Hilbert空间H的基，假定$\|x_n\|=1$，那么$\{x_n\}$为H的无条件基的充要条件是(i)$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛推出$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$收敛；(ii)$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n f_n$收敛推出$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2$收敛，这里，$\{f_n\}$是$\{x_n\}$的坐标泛函列.

我们不妨假定$L^2[-\pi,\pi]$是实 Hilbert空间. 令$x_n=\frac{f_n}{\|f_n\|}$，$y_n=\|f_n\|g_n$，于是，如果$\{f_n\}$是无条件基，那么$\{x_n\}$也将是$L^2[-\pi,\pi]$的无条件基. 由于$\|x_n\|=1$，因而由上述命题可知，对每一$y\in L^2[-\pi,\pi]$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\langle y,y_n\rangle|^2<+\infty.$$

因$\{f_n\}$不是$L^2[-\pi,\pi]$中的 Bessel 基，故存在$y\in L^2[-\pi,\pi]$，使$y=\sum_{n=0}^{\infty}\langle y,g_n\rangle f_n$且$\sum_{n=0}^{\infty}|\langle y,g_n\rangle|^2=+\infty$. 于是由等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\langle y,y_n\rangle|=\sum_{n=0}^{\infty}|\langle y,g_n\rangle|^2\|f_n\|^2$$

推知$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\|f_n\|^2=0$，此为矛盾. 因此，$\{f_n\}$ 不是$L^2[-\pi,\pi]$中的无条件基.

39. 有基而没有无条件基的 Banach 空间.

第一例 James 空间（参看第六章例 17）有基而没有无条件基.

第二例 Karlin[169] 和 Pelczyński[239] 分别指出，Banach 空间$C[0,1]$和$L[0,1]$有基而没有无条件基. Pelczyński[240] 于 1961 年进一步指出，$L[0,1]$不能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间，即$L[0,1]$不能等距同构于具有无条件基的 Banach 空间的某个子空间. 有关证明，读者如有兴趣，可参看作者原文.

注 James 空间和 Banach 空间$C[0,1]$以及$L[0,1]$均不能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间，这些空间都不是自反的. 第一个具有基的可分自反 Banach 空间而不能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间的例子是由 Kwapien 和Pelczyński[184] 于 1970 年作出的. 之后，Lindenstrauss和Pelczyński[201] 指出，对每一数列$\{p_n\}$，$1<p_n<+\infty(n=1,2,\cdots)$，若$\inf\limits_n\{p_n\}=1$ 或$\sup\limits_n\{p_n\}=+\infty$，则自反 Banach空间$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus L^{p_n}[0,1]\right)_2$不能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间.

关于无条件基，下列问题是没有解决的：

问题 1　设 X 是具有无条件基的 Banach空间，Y 是 X 的相补子空间，即存在 X 到 Y 上的连续射影算子，则 Y 是否必有无条件基？

问题 2　Banach 证明了每个无穷维 Banach 空间都含有无穷维的具有基的子空间。于是，我们自然要问：每个无穷维 Banach 空间是否都含有无穷维的具有无条件基的子空间？

40. 一个没有无条件基的赋范线性空间，而能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间.

Lindenstrauss[194]首先作出了一个没有无条件基的赋范线性空间，而能嵌入到具有无条件基的 Banach 空间。他指出，若 $\{e_n\}$ 是 Banach 空间 l 的自然基，令

$x_n = e_n - \dfrac{(e_{2n} + e_{2n+1})}{2}$, $n=1,2,\cdots$，则由 $\{x_n\}$ 张成的 l 的闭子空间 D 有基 $\{x_n\}$，但它没有无条件基。然而，D 又是具有无条件基的 Banach 空间 l 的子空间.

41. 某个 Banach 空间的 Schauder 基，它弱收敛于 0，但它没有无条件的基序列.

我们有下述问题：如果 Banach 空间中的点列 $\{x_n\}$ 适合条件 $\|x_n\|=1, n=1,2,\cdots$，且 $\{x_n\}$ 弱收敛于 0，那么，$\{x_n\}$ 是否必有子列，它是一个无条件基序列？

Maurey 和 Rosenthal[315]指出，这个问题的答案是否定的。他们构造了一个具有 Schauder 基 $\{x_n\}$ 的 Banach 空间，使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 0，而 $\{x_n\}$ 却没有无条件基序列。关于构造细节可参看作者原文.

42. 具有唯一无条件基的无穷维 Banach 空间.

Pełczyński 和 Singer[243]指出，若 Banach 空间 X 有条件基，则 X 就有不可数个不等价的正规化的条件基。因此，关于 Banach 空间的条件基，或者没有，或者就有不可数个.

Hennefeld[132]指出，如果 Banach 空间X有两个不等价的正规化的无条件基，那么X就有不可数个不等价的正规化的无条件基．因此，对于 Banach 空间的无条件基，就有下列三种可能情况：没有，仅有一个，有不可数个．

Lorch[208]指出，Banach 空间l^2中每个正规化的无条件基都等价于l^2中的自然基$\{e_n\}$．Lindenstrauss 和 Pelczyński[206]指出，Banach 空间c_0和l中的每个正规化的无条件基分别等价于c_0和l中的自然基$\{e_n\}$．由此可见，Banach 空间c_0，l或l^2仅有唯一的无条件基(在等价的意义下)．Lindenstrauss 和 Zippin[206]还进一步指出，如果 Banach 空间X有唯一的无条件基(在等价的意义下)，那么X必定线性同胚于空间c_0，l或l^2中的一个．因此，在线性同胚意义下，有而且只有 Banach 空间c_0，l或l^2有唯一的无条件基．

关于这些陈述的证明，可参看相应的参考文献．

43．某个 Banach 空间的无条件基，它不是有界完全的．

Banach 空间c_0中的自然基$\{e_n\}$是无条件的．对于数列$\{\alpha_i\}$ $(\alpha_i=1, i=1,2,\cdots)$而言，显然有

$$\sup_n \left\| \sum_{i\leqslant n} \alpha_i e_i \right\| = 1,$$

但$\sum_{i\leqslant n} \alpha_i e_i$在$c_0$中并不收敛，故$\{e_n\}$不是有界完全的．

注　容易验证，$\{e_n\}$是c_0的收缩基．

44．一个 Banach 空间的无条件基，它不是收缩的．

Banach 空间l的自然基$\{e_n\}$是无条件的．取$f=(1,1,\cdots)\in l^*=l^\infty$，$x=e_{n+1}$，易见

$$f(e_{n+1})=f(x)=1\nrightarrow 0 \ (n\to\infty),$$

因此，$\{e_n\}$不是收缩的．

注 容易验证，$\{e_n\}$是 l 的有界完全基。

45. 某个 Banach 空间的无条件基，它不是绝对收敛基。

设$\{x_n\}$是 Banach 空间X的基，$\{f_n\}$是相应的坐标泛函列。若对每一 $x\in X$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n$ 都是绝对收敛的，则称$\{x_n\}$ 是 X 的绝对收敛基。

Banach空间中的无条件基不必是绝对收敛基。例如，Banach 空间 $l^p(1<p<+\infty)$中的自然基$\{e_n\}$ 是无条件基。兹证$\{e_n\}$ 不是绝对收敛基。事实上，设$\{f_n\}$是$\{e_n\}$的坐标泛函列，则 $f_n=e_n$。取 $x=\{x_n\}=\left\{n^{-\frac{p'}{p}}\right\}\in l^p(1<p'<p)$，则

$$\left\|\sum_{i\leqslant n} f_i(x)e_i\right\|=\left(\sum_{i\leqslant n}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i$ 是收敛的。但

$$\sum_{i\leqslant n}\|f_i(x)e_i\|=\sum_{i\leqslant n}|x_i|=\sum_{i\leqslant n}i^{-\frac{p'}{p}}\geqslant\int_1^n t^{-\frac{p'}{p}}dt$$

$$=\left(1-\frac{p'}{p}\right)^{-1}(n^{1-\frac{p'}{p}}-1)\to+\infty(n\to\infty),$$

故$\{e_n\}$不是绝对收敛基。

46. 某个 Banach 空间中的次对称基，它不是对称基。

Banach 空间X中的基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$称为对称基，是指对正整数的任意一个重排 π，$\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$等价于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

易证，对称基必是无条件基。

Banach 空间 X 中的基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$称为次对称基，是指$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是无条件基，而且对每个递增的正整数列$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$等价于

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Singer[285]证明了对称基必是次对称基. 然而,次对称基不必是对称基. 下面的例子属于 Garling[110].

设 Y 是一切这样的数列 $y=(a_1,a_2,\cdots)$ 所组成的线性空间,使

$$\|y\|=\sup\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n_i}|\cdot i^{\frac{-1}{2}}<+\infty,$$

这里,上确界是对一切递增的正整数列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 来取的. 不难证明,$(Y,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间,而且 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(Y,\|\cdot\|)$ 的一个次对称基.

兹证 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是 $(Y,\|\cdot\|)$ 的对称基. 事实上,对每一固定的 k,数列 $y^{(k)}=(1,2^{\frac{-1}{2}},\cdots,k^{\frac{-1}{2}},0,0,\cdots)$ 是数列 $z^{(k)}=(k^{\frac{-1}{2}},(k-1)^{\frac{-1}{2}},\cdots,1,0,0,\cdots)$ 的一个重排,而

$$\|y^{(k)}\|=\sum_{n=1}^{k}n^{-1},$$

$$\|z^{(k)}\|=\sum_{n=1}^{k}(k-n+1)^{\frac{-1}{2}}n^{\frac{-1}{2}},$$

故 $\sup\limits_k\|y^{(k)}\|=+\infty$, $\sup\limits_k\|z^{(k)}\|<+\infty$. 因此,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是 Y 的对称基.

注 Garling 构造的 Banach 空间不是一致凸的(关于一致凸空间的定义可参看第七章的引言). 针对这一情况,Pujara[250]构造了一个一致凸的 Banach 空间,它有基 $\{x_n\}$,使 $\{x_n\}$ 是次对称而非对称的.

可以证明,Banach 空间 c_0 或 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 的对称基彼此都是等价的. 于是 Singer[290]提出问题:在具有对称基的 Banach 空间中,这个空间中的所有对称基是否都是等价的? 针对这一问

题，Lindenstrauss 和 Tzafriri[204] 构造了一个自反的 Orlicz 空间，其中至少存在两个不等价的对称基，从而否定地回答了 Singer 的问题.

Altshuler[25]构造了一个具有对称基$\{e_n\}$的 Banach 空间 Y，使 Y 中的所有对称基都等价于$\{e_n\}$，而且 Y 不含有等距同构于 c_0 或 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$的子空间.

47．有基而没有次对称基的 Banach 空间.

Banach 空间 $L^p[0,1](1<p<+\infty, p\neq 2)$有基而没有次对称基(参看[290]，p.568).

注　Banach 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$具有次对称基．例如，$l^p$ 中的自然基$\{e_n\}$就是次对称基．还可证明，$l^p(1<p<+\infty, p\neq 2)$中的所有次对称基彼此都是等价的(参看[290]，pp．573—574).

下述问题尚未解决：具有次对称基的 Banach 空间，其中的次对称基是否都是等价的？

48．一个有基的 Banach 空间 X，其中存在有基的子空间 G，使 G 中没有一个基可以扩张成为 X 的基.

Pełczyński[242]曾提出下述问题：设 X 是具有基的 Banach 空间，$\{y_n\}\subset X$ 且$\{y_n\}$是 X 的一个基序列，那么是否存在 X 的一个基$\{x_r\}$，使对每一 n，存在标号 i_n 而有 $x_{i_n}=y_n$？换言之，能否把$\{y_n\}$扩张成为 X 的基？

后来，Pełczyński 和 Rosenthal 否定地回答了这个问题．然而，在他们的反例中，$\{y_n\}$可以有某个重排$\{y_{\sigma(n)}\}$，使$\{y_{\sigma(n)}\}$可以扩张成为 X 的基．于是便产生下述问题：在某个具有基的 Banach 空间 X 中，是否存在$\{y_n\}\subset X$，使$\{y_n\}$是$\overline{\text{span}}\{y_n\}$的基，而$\{y_n\}$没有一个重排$\{y_{\sigma(n)}\}$能扩张成为 X 的基？

Singer[291]获得了如下的一般结果：存在具有基的 Banach 空间 X，它含有具有基的子空间 G，使 G 中没有一个基可以扩张成为 X 的基．读者如有兴趣，可参看作者原文.

49．一个 Banach 空间的分解，它不是 Schauder 分解．

设$\{b_i\}$是拓扑线性空间 X 的基，$\{\beta_i\}$是相应于 $\{b_i\}$ 的坐标泛函列．若每个 β_i 都是连续的，则称$\{b_i\}$是 X 的Schauder 基．

若$\{b_i\}$是拓扑线性空间 X 的基，则对每一 $x\in X$，可唯一地表为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i,$$

这里，x_i 是由 b_i 张成的一维子空间中的元．于是，自然可以推广基的概念，而用 X 的子空间列$\{M_i\}$代以$\{b_i\}$．简言之，有

定义 拓扑线性空间 X 中的非平凡线性子空间（不必是闭的）列$\{M_i\}$称为 X 的分解，是指对每一 $x\in X$，存在唯一的点列$\{x_i\}$，使 $x_i\in M_i$，$i=1,2,\cdots$，且

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i.$$

相应于分解$\{M_i\}$的是一个射影列 $\{P_i\}$，它由等式 $P_ix=x_i$ 确定．这里，$x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$ 是 x 按照分解$\{M_i\}$的唯一表达式．注意，对每一 i，M_i 是 P_i 的值域，且当 $i\neq j$ 时，$P_iP_jx=0$，而当 $i=j$ 时，$P_iP_jx=P_ix$．

称分解$\{M_i\}$为 Schauder 分解，是指每个射影 P_i 都是连续的．Schauder 分解是 Schauder 基的概念的推广．

我们知道，Banach 空间中的每个基必是 Schauder 基．然而，Banach 空间中的分解不必是 Schauder 分解．Sanders[276]有例如下：

设 P 是 l^∞ 到 c_0 上的射影算子，再设 $M_1=\boldsymbol{N}(P)$为 P 的零空间，即

$$M_1=\{x:P(x)=0,x\in l^\infty\}.$$

用 M_i 代表由 $e_{i-1}(i=2,3,\cdots)$ 张成的 l^∞ 的一维子空间. 于是，$\{M_i\}$是 l^∞ 的一个分解.

另一方面，Sobczyk[298]证明了射影算子 P 不连续，故 $M_1=N(P)$不是 l^∞ 的闭子空间. 由于相应于 M_1 的射影 P_1 的值域是 M_1，故 P_1 不连续. 因此，$\{M_i\}$不是 l^∞ 的 Schauder 分解.

注　Dean[81]进一步指出了 Banach 空间 l^∞ 中不存在 Schauder 分解.

50. 具有 Schauder 分解的不可分的 Banach 空间.

Sanders[275]证明了，若 X 为 Banach 空间，使 X^*有 Schauder 基，则 X^{***} 有 Schauder 分解.

应用这一断语于 Banach 空间 $X=c_0$，便知不可分 Banach 空间 $X^{***}=(l^\infty)^*$ 具有 Schauder 分解

第六章　自反空间和弱紧生成空间

引言

本章涉及自反空间和弱紧生成空间方面的例子．Banach 空间自反性的概念已在第二章引言中给出．自反 Banach 空间有许多充要条件和重要性质，读者可参看[16]，这里不再赘述．现在我们引入与自反空间紧密相关的其它概念．

一个赋范线性空间 Y 称为在另一个赋范线性空间 X 中有有限表示，如果对于 Y 的每个有限维子空间 Y_n 和 $\varepsilon>0$，存在 X 的有限维子空间 X_n 及由 Y_n 到 X_n 上的线性同胚映射 T，使

$$\|T\|\|T^{-1}\|<1+\varepsilon.$$

一个 Banach 空间 X 称为超自反的，如果每个在 X 中有有限表示的 Banach 空间 Y 都是自反的．

显然，超自反空间是自反的．还可以证明，若 X 与 Y 是两个线性同胚的 Banach 空间，则 X 是超自反的，当且仅当 Y 也是超自反的．若 X 是 Banach 空间，则 X 是超自反的，当且仅当 X^* 是超自反的．Banach 空间 X 为超自反的充要条件是在 X 上可赋予等价的一致凸的范数．

Banach 空间 X 称为具有 Banach-Saks 性质，简记为 BSP，如果 X 中每个有界点列 $\{x_n\}$ 有一子列 $\{x_{n_k}\}$，使它的算术平均值按范数收敛于 X 中一个元 x_0，即

$$\frac{(x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})}{k}\to x_0\in X\,(k\to\infty).$$

Banach 空间 X 称为具有弱 Banach-Saks 性质，简记为 wBSP，如果 X 中每个弱收敛的点列 $\{x_n\}$ 有一子列 $\{x_{n_k}\}$，使它的算术平均值按范数收敛于同一元素．

可以证明，具有 BSP 的 Banach 空间是自反的．因此，Banach

空间X具有BSP的充要条件是X自反且具有 wBSP. BSP是线性同胚不变的.

我们列出关于 Banach 空间的一致凸，超自反，有 BSP，wBSP 及自反性之间的蕴涵关系如下：

$$\text{一致凸} \Longrightarrow \text{超自反} \Longrightarrow \text{BSP} \begin{array}{l} \nearrow \text{自反} \\ \searrow \text{wBSP} \end{array}$$

设X是赋范线性空间，如果X^*中在X的单位闭球上达到范数的元素f的全体在X^*中稠密（按范数拓扑），则称X为次自反的.

Bishop 和Phelps 证明了每个 Banach 空间都是次自反的. 对于一般的不完备的赋范线性空间，可能是次自反的，也可能不是次自反的.

Banach空间X称为弱紧生成空间，简记为 WCG 空间，如果存在X的一个弱紧集K，使$X=\overline{\text{span}K}$.

自反空间是WCG空间，可分 Banach 空间也是WCG空间.

有关自反空间和弱紧生成空间的更多的材料可参看[16].

1. 不自反的Banach空间.

因Banach 空间 c_0 的共轭空间是 l，而 l 的共轭空间是Banach 空间 l^∞，于是 l^∞是 c_0 的二次共轭空间. 由于 c_0 是l^∞的真子空间，因而c_0并不自反.

从 c_0不自反的事实可知 l 和 l^∞均不自反.

注 自反性的概念是由 Hahn[124]引进的，Lorch[209]称之为"自反性".

若X自反，则X与X^{**}在典则映射下等距同构. 于是，X的可分性蕴涵X^{**}的可分性，从而X^*也是可分的. 因此、具有不可分共轭空间X^*的可分赋范线性空间X不可能是自反的.

2．一个不自反的赋范线性空间，其共轭空间自反．

如所周知，若赋范线性空间X自反，则其共轭空间X^*也自反．当X为Banach空间时，逆命题也成立．事实上，设J是由X到X^{**}的典则映射，因X完备且J是由X到$J(X)$上的线性同胚映射，故$J(X)$是X^{**}的闭子空间．假如X不自反，即$J(X)\neq X^{**}$，则存在元$x^{***}\in X^{***}$及$x^{**}\in X^{**}$，使当$x\in X$时$x^{***}(J(x))=0$，$x^{***}(x^{**})\neq 0$．由于X^*自反，所以存在$x^*\in X^*$，使$J(x^*)=x^{***}$及$0=x^{***}(J(x))=J(x)(x^*)=x^*(x)$，因此$x^*=0$．但$0\neq x^{***}(x^{**})=x^{**}(x^*)$，此为矛盾，故$X$自反．

这个极为简单的证明是由Goldberg[118]给出的，它只用到了Hahn-Banach定理的推论．

应当注意的是当X不完备时，逆命题并不成立．例如，设$X=E^\infty$，对$x=\{\xi_k\}\in X$，令

$$\|x\|=\left(\sum_k|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则X为自反Banach空间l^2的稠密线性子空间，由于X不完备，故它不自反．

兹证$X^*=(l^2)^*=l^2$，从而X^*自反．事实上，任取X上的连续线性泛函f，即$f\in X^*$，据Hahn-Banach定理，f可保范地扩张到整个空间l^2上的连续线性泛函，即存在$F\in(l^2)^*$，使$\|F\|=\|f\|$，且当$x\in X$时$F(x)=f(x)$．因X在l^2中稠密，故F是唯一确定的，由此可见，X^*与$(l^2)^*$是等距同构的，故X^*是自反的Banach空间．

3．存在某个不自反的赋范线性空间X，使对每一$f\in X^*$，f在X的单位闭球上达到上确界．

容易证明，若X是自反的Banach空间，则对任一$f\in X^*$，f在X的单位闭球上达到上确界，即存在$x\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，使$f(x)=\|f\|$．

1957 年，James 证明，如果X是可分的 Banach 空间，且X上的每个连续线性泛函都在X的单位闭球上达到上确界，那么X必自反。1964 年，James 去掉了空间可分这一限制。在刻划自反性的特征中，James 定理是最强有力的。但是必须注意，应用 James 定理必须对 Banach 空间。简言之，可以作出一个不自反的赋范线性空间X，使任一$f\in X^*$都能在X的单位闭球上达到上确界。下面的构造法属于 James。令

$$l_n^\infty=(\{a_i\}_{i=1}^n;\|\{a_i\}_{i=1}^n\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|),\quad n=1,2,\cdots.$$

再令

$$E=\left(\sum_{n=1}^\infty\oplus l_n^\infty\right)_{l^2}=\Big\{x=(x_1,x_2,\cdots):x_n\in l_n^\infty,\text{且}$$

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\Big\}.$$

容易看到，$E^{**}=\left(\sum_{n=1}^\infty\oplus l_n^\infty\right)_{l^2}$，故$E$是自反的。令

$$X=\operatorname{span}\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in E:\text{对每个 }n,$$

$$x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)}),|\xi_1^{(n)}|=\cdots=|\xi_n^{(n)}|\},$$

$$X_n=\{(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)}):|\xi_1^{(n)}|=\cdots=|\xi_n^{(n)}|\}\subset X$$

（看作等距嵌入）。

显然，X是E的线性子空间。令 $e_i^{(n)}=(0,\cdots,0,\underset{i\text{ 位}}{1},0,\cdots,0)$。

又令

$$y_1^{(n)}=(1,\cdots,1,\cdots,1)\in X_n\subset X,$$

$$y_2^{(n)}=(-1,\cdots,-1,\underset{i\text{ 位}}{1},-1,\cdots,-1)\in X_n\subset X,$$

则 $e_i^{(n)}=\dfrac{(y_1^{(n)}+y_2^{(n)})}{2}\in X$，故 $l_n^\infty\subset X$，从而$\overline{X}=E$。

但是 $X\neq E$。事实上，令

$$\hat{X}=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in E:x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)}),|\xi_1^{(n)}|=\cdots$$
$$=|\xi_n^{(n)}|\},$$

由假设$X=\operatorname{span}\hat{X}$．考察$X$中元的构造．若$x\in X$，则

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i,$$

其中$y_i\in\hat{X}$，a_i为实数．由于$a_iy_i\subset\hat{X}$，故不妨设$x=\sum_{i=1}^{n}y_i$，其中$y_i\in\hat{X}$．根据$\hat{X}$中元的构造知，对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,x_m,\cdots)$，当$m>2^n$时，$x_m=(\xi_1^{(m)},\cdots,\xi_m^{(m)})$中只有$2^{n-1}$项绝对值不同．这样，容易看到

$$x_0=\left\{(1),\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}\right),\cdots\right\}\notin X.$$

显然它是E中的元．因此X不是Banach空间，从而不是自反的．

但任何$f\in X^*=E^*=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus l_n\right)_{l^2}$在$X$的单位闭球上是达到上确界的，其中

$$l_n=\left(\{x_i\}_{i=1}^n:\|\{x_i\}_{i=1}^n\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right).$$

事实上，若$f=\{f_n\}$，其中$f_n=(b_1^{(n)},\cdots,b_n^{(n)})$，$f_n\in l_n$，$\|f_n\|_1=\sum_{i=1}^{n}|b_i^{(n)}|$．取$x=(x_1,x_2,\cdots)$，其中$x_n=\left(\dfrac{\operatorname{sgn}b_i^{(n)}\|f_n\|_1}{\|f\|}\right)_{i=1}^n$，则

$$\|x\|=\frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|f\|}=1,$$

且

$$f(x)=\frac{(\|f_1\|_1^2+\cdots+\|f_n\|_1^2+\cdots)}{\|f\|}$$
$$=\frac{\|f\|^2}{\|f\|}=\|f\|.$$

4．等距同构于它的第二共轭空间而本身并不自反的 Banach 空间．

设X为Banach 空间，如果X等距同构于X^{**}，那么X是否必定自反？James 于 1950 年构造了一个 Banach 空间J，它等距同构于J^{**}，但它并不自反（参看例 17）．因此，在 Banach 空间自反性的定义中必须强调在典则映射下 $X=X^{**}$．

5．存在某个无穷维自反Banach空间，它不线性同胚于它的Cartesian 积．

Banach 曾提出下述问题：是否每个无穷维Banach 空间X必定线性同胚于它的Cartesian积X^2？长期以来，这个问题悬而未决．直到 1960 年，Bessaga 和 Pelczyński[45]以及 Semadeni[282]作出了一个 Banach 空间X，它并不线性同胚于X^2，从而否定地回答了 Banach 提出的问题．1972 年，Figiel[103]进一步作出了一个无穷维自反Banach 空间，它不线性同胚于它的 Cartesian 积．这里，我们简要地介绍他的例子如下：

用 l_n^p 代表 n 有序数组 $a=(a_1,\cdots,a_n)$且具有范数

$$\|a\|=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leqslant p<+\infty,\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|, & p=+\infty,\end{cases}$$

的 Banach 空间．设$\{(X_k,\|\cdot\|_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Banach 空间列，命所有使 $x_k\in X_k$ 且

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_k^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty(1\leqslant p<+\infty) \tag{1}$$

的点列$x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$所组成的空间记作$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\oplus X_k\right)_p$，则

$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\oplus X_k\right)_p$按(1)式定义的范数为Banach空间. 可以证明对$p>1$及每个适合$\lim_{i\to\infty}p_i\geqslant\max\{2,p\}$的递减的实数列$\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$，存在正整数列$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，使自反Banach空间$X=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus l_{n_i}^{p_i}\right)_p$不线性同胚于$X^2$. 证明细节可参看作者原文.

6. 一个无穷维Banach空间，它的每个自反子空间都是有限维的.

Banach空间l具有所需的性质. 事实上，如果M是l的一个自反子空间，那么单位球$\{x:x\in M,\|x\|\leqslant 1\}$是弱序列紧的. 由于$l$中点列的强收敛与弱收敛彼此等价，因此，$\{x:x\in M,\|x\|\leqslant 1\}$也是紧的. 然而，这只有当$M$是有限维时才有可能.

注 Banach空间c_0也不含有无穷维的自反子空间（参看[37]，p. 194）.

7. 一个自反空间的连续象，它不是自反空间.

设I是自反Banach空间l^2到c_0内的恒等算子. 由于c_0不含有无穷维的自反子空间，故$I(l^2)$不是自反空间.

注 容易证明，若Banach空间Y线性同胚于自反Banach空间X，则Y也必自反. 上述反例说明了在这个命题中，Y线性同胚于X的条件不能减弱为Y是X的线性连续象.

8. 具有弱Banach-Saks性质而不具有Banach-Saks性质的Banach空间.

显然，具有BSP的Banach空间必定具有wBSP. 然而逆命题并不成立. 例如，设$\{x_n\}\subset l$且$x_n\xrightarrow{弱}x_0$，则因l中点列的强、弱收敛性是等价的，故$x_n\xrightarrow{强}x_0$，从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\frac{x_{n_i}}{k}-x_0\right\|\to 0(k\to\infty),$$

即空间 l 具有 wBSP．另一方面，容易证明，l 没有BSP．

注 Banach 空间 c_0，$L[0,1]$也具有wBSP而不具有BSP．

9．不具有 Banach-Saks 性质的自反 Banach 空间．

Nishiura 和 Waterman[235]证明了每个具有 BSP 的 Banach 空间都是自反的．Sakai[273] 提出下述问题：是否存在自反的 Banach 空间而它没有 BSP？Baernstein[35]于 1972 年给这个问题以肯定的回答．这里，我们把他的例子介绍如下：

我们用 γ 代表正整数的有限非空集，使集 γ 的势（即 γ 中元素的数目）$\leqslant \gamma$ 中的最小元素．Γ 代表一切具有上述性质的集 γ 所成的集族．所谓 $\gamma<\gamma'$，是指 γ 中的最大元素小于 γ'中的最小元素．设 $\gamma\in\Gamma$，又 $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$为一实数列，定义

$$\sigma(x,\gamma)=\sum_{i\in\gamma}|x_i|.$$

设$\{\gamma_k\}\subset\Gamma$ 使得 $\gamma_k<\gamma_{k+1}(k\geqslant1)$，定义

$$\sigma(x,\{\gamma_k\})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(x,\gamma_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

并定义

$$\|x\|=\sup\sigma(x,\{\gamma_k\}),$$

这里 sup 是对一切具有上述性质的$\{\gamma_k\}$来取的．设 E 为具有范数 $\|x\|<+\infty$的数列 $x=\{x_i\}$所成之集，并在 E 上定义线性运算如常．不难验证，$(E,\|\cdot\|)$为一Banach 空间．

令 $e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，易见，$\|e_n\|=1$．可以证明：

$$\{e_n\}\text{是}E\text{的有界完全的收缩基}. \tag{2}$$

假如陈述(2)成立，那么据 James 定理(参看第五章引言中的定理 4)，E是自反的 Banach 空间．此外，由于$\{e_n\}$是E的收缩基，故$\{e_n\}$弱收敛于 0．设 q 是某个正整数集到其自身中的严格递增的函数．如果 E 有 BSP，则存在$\{e_n\}$的子列$\{e_{q(i)}\}$，使

$$s_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e_{q(i)}$$

的强极限(即按范数收敛)存在，而且这个强极限定然是0. 然而这是不可能的，因为我们若取$\gamma=\{q(n+1),q(n+2),\cdots,q(2n)\}$，则可证对一切$n$，均有$\|s_{2n}\|>\frac{1}{2}$. 因此，$E$没有 BSP .

现在我们再来证明陈述(2). 我们首先证明$\{e_n\}$是E的基. 为此任取$x\in E$，并令

$$T^n x = x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

假如$\{e_n\}$不是E的基，那么存在$x\in E$，使对一切n有$\|T^n x\|>1$. 特别有$\|x\|>1$. 于是我们在Γ中可以找到$\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_{p(1)}$，使得

$$\sum_{k=1}^{p(1)}\sigma(x,\gamma_k)^2>1.$$

设m是大于$\gamma_{p(1)}$中的最大元素的正整数，由于$\|T^m x\|>1$，故我们在Γ中可以找到$\gamma_{p(1)+1}<\gamma_{p(1)+2}<\cdots<\gamma_{p(2)}$，使得$\gamma_{p(1)}<\gamma_{p(1)+1}$且有

$$\sum_{k=p(1)+1}^{p(2)}\sigma(x,\gamma_k)^2=\sum_{k=p(1)+1}^{p(2)}\sigma(T^m x,\gamma_k)^2>1.$$

因此
$$\|x\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{p(2)}\sigma(x,\gamma_k)^2>2.$$

继续这个程序，我们得到$\|x\|=+\infty$. 此与$x\in E$相矛盾. 因此，$\{e_n\}$是E的 Schauder 基.

兹证$\{e_n\}$是有界完全的. 事实上，设$x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$是一个实数列，使得

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| < +\infty.$$

易见，$x \in E$. 由于$\{e_n\}$是E的基，因此$\sum_{i=1}^\infty x_i e_i = x$. 特别地，此级数收敛. 这就证明了基$\{e_n\}$是有界完全的.

剩下要证基$\{e_n\}$是收缩的，这只要证明对每一$u \in E^*$，皆有

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \left| u\left(\sum_{i=n}^\infty x_i e_i \right) \right| \to 0 \ (n \to \infty). \tag{3}$$

假如(3)不成立，则存在$\delta > 0$和具有$p(1)=1$的严格递增的正整数列$\{p(m)\}_{m=1}^\infty$，以及E中的点列$\{x^{(m)}\}$，使得$\|x^{(m)}\| \leqslant 1$，$u(x^{(m)}) \geqslant \delta$，并且除了适合不等式$p(m) \leqslant i < p(m+1)$的$i$以外，均有$x_i^{(m)} = 0$. 令$Q(0)=1$，而

$$Q(n) = Q(n-1) + p(Q(n-1)), n = 1, 2, \cdots,$$

$$\omega^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{Q(n) - Q(n-1)} \sum_{m=Q(n-1)}^{Q(n)-1} x^{(m)},$$

并设$x = \{x_i\}$是由等式

$$x_i = \omega_i^{(n)} \quad (p(Q(n-1)) \leqslant i < p(Q(n)))$$

确定的点列. 如果我们能够证明$x \in E$，那么$x = \sum_{n=1}^\infty \omega^{(n)}$在$E$中收敛，从而$\sum_{n=1}^\infty u(\omega^{(n)})$也收敛. 另一方面，我们有

$$u(\omega^{(n)}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{Q(n) - Q(n-1)} \sum_{m=Q(n-1)}^{Q(n)-1} u(x^{(m)})$$

$$\geqslant \frac{\delta}{n},$$

因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u(\omega^{(n)})$发散.此为矛盾，这样就完成了$\{e_n\}$是$E$的收缩基的证明.

现在我们就来证明$x\in E$. 为此，设$\{\gamma_k\}$是(1)式中的序列，对$n=1,2,\cdots$，令

$A(n)=\{k:\gamma_k$中的最小元$\in[p(Q(n-1)),p(Q(n))]\}$，

并令$u(n)$是集$A(n)$中的最大元. 据x的定义，当$k\in A(n)$且$k<u(n)$时，有$\sigma(x,\gamma_k)=\sigma(\omega^{(n)},\gamma_k)$，故得

$$\sum_{k\in A(n)}\sigma(x,\gamma_k)^2\leqslant\|\omega^{(n)}\|^2+\sigma(x,\gamma_{u(n)})^2. \tag{4}$$

据$\omega^{(n)}$的定义，我们有$\|\omega^{(n)}\|\leqslant n^{-1}$.现在我们来估计不等式(4)的另一项$\sigma(x,\gamma_{u(n)})^2$. 令$\gamma_{u(n)}=\gamma'\cup\gamma''$，这里$\gamma'=\gamma\cap(0,p(Q(n)))$，$\gamma=\gamma''\backslash\gamma'$. 于是，$\sigma(x,\gamma')=\sigma(\omega^{(n)},\gamma')\leqslant n^{-1}$. 此外，$\gamma_{u(n)}\in\Gamma$，因此，和式$\sigma(x,\gamma'')$中的项数小于$p(Q(n))$，而每一项具有形式$\alpha N^{-1}[Q(N)-Q(N-1)]^{-1}$，其中$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$N\geqslant n+1$. 由于$Q(N)-Q(N-1)=p(Q(N-1))$，而函数$p$是递增的，故每一项必定小于$n^{-1}[p(Q(n))]^{-1}$，因此$\sigma(x,\gamma'')<n^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\sigma(x,\gamma_{u(n)})^2&=[\sigma(x,\gamma')+\sigma(x,\gamma'')]^2\\&<4\,n^{-2}.\end{aligned}$$

由此可知，(4)式右端之和小于$5n^{-2}$. 于是得到

$$\begin{aligned}\sigma(x,\{\gamma_k\})^2&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in A(n)}\sigma(x,\gamma_k)^2\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}5\,n^{-2}<+\infty,\end{aligned}$$

即$x\in E$，证毕.

10. 存在 Banach 空间 X，使 X 不具有 Banach-Saks 性质，而X^*

具有 Banach-Saks 性质。

长期以来，人们不知道当 Banach 空间 X 具有 BSP 时，X^* 是否必具有 BSP 或等价的，当 X^* 具有 BSP 时，X 是否必具有 BSP.

俞鑫泰和张文耀[17]以及 Seifert[281]各自独立地指出，Baerstein 给出的自反而不具有 BSP 的 Banach 空间的例子作稍许改动，得到一类 Banach 空间，它们本身不具有 BSP，但共轭空间具有 BSP. 这里，我们把俞鑫泰和张文耀的工作介绍如下：

设 σ 是正整数的非空有限集，若 $\overline{\overline{\sigma}} \leqslant \min\{n:n\in\sigma\}$，则称 σ 为可允许集. 令 $\Gamma=\{\sigma:\sigma$ 是可允许集$\}$. 对 $\sigma_1,\sigma_2\in\Gamma$，规定

$$\sigma_1<\sigma_2 \Longleftrightarrow \max\{n:n\in\sigma_1\}<\min\{n:n\in\sigma_2\}.$$

称可允许集列 $\{\sigma_k\}\subset\Gamma$ 为块列，若 $\sigma_k<\sigma_{k+1}, k\geqslant 1$.

对 $\sigma\in\Gamma$ 及 $x=\{x_n\}$，定义

$$s(x,\sigma)=\sum_{i\in\sigma}|x_i|.$$

对块列 $\{\sigma_k\}\subset\Gamma$，定义

$$s_p(x,\{\sigma_k\})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}s^p(x,\sigma_k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

和

$$\|x\|_p=\sup s_p(x,\{\sigma_k\}) \quad (1<p<+\infty).$$

这里，上确界取遍 Γ 中所有的块列 $\{\sigma_k\}$.

令 $B_p=\{x=\{x_k\}:\|x\|_p<+\infty\}$，$1<p<+\infty$，由例 9 的证明容易得到 $\{e_n\}$ 是 B_p^* 的基，但是，B_p 不具有 BSP.

下面，我们证明 B_p^* 具有 BSP. 为简单起见，记 $\|x\|_p$ 为 $\|x\|$.

引理 设 $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i\in B_p$，$\|x\|\leqslant 1$，则对任意 n，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right\|+\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}x_ie_i\right\|\leqslant 2^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

证 注意不等式 $(|a|+|b|)^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$, $1<p<+\infty$ 及 B_p 中范数定义即可. 证毕.

例子的证明：因为 B_p^* 是自反的，由[83], p.79 知只须证明存在 $\theta(0<\theta<2)$，对任何 $\left\{ y_n^* = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^n f_i \right\} \subset B_p^*$, $\|y_n^*\| \leqslant 1$, $y_n^* \xrightarrow{弱} 0$. 存在 n_1, n_2，使 $\|y_{n_1}^* + y_{n_2}^*\| < \theta$ 即可.

对任意 $\varepsilon>0$，满足 $\theta=(1+\varepsilon)2^{\frac{1}{q}}+2\varepsilon<2$. 可选取 N_1，使 $\left\| \sum_{i=N_1+1}^{\infty} y_i' f_i \right\| < \varepsilon$. 由于 $y_n^* \xrightarrow{弱} 0$，故对任意 i，有 $y_i^n \to 0$ $(n\to\infty)$，从而存在 $N_2>N_1$，使 $\left\| \sum_{i=1}^{N_1} y_i^{N_2} f_i \right\| < \varepsilon$，故

$$\left\| \sum_{i=1}^{N_1} y_i' f_i \right\| < 1+\varepsilon, \quad \left\| \sum_{i=N_1+1}^{\infty} y_i^{N_2} f_i \right\| < 1+\varepsilon. \tag{1}$$

任取 $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in B_p$, $\|x\|=1$，使

$$\left\| \sum_{i=1}^{N_1} y_i' f_i + \sum_{i=N_1+1}^{\infty} y_i^{N_2} f_i \right\|$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N_1} y_i' f_i + \sum_{i=N_1+1}^{\infty} y_i^{N_2} f_i \right)(x),$$

故由(1)，得到

$$\|y_1^* + y_{N_2}^*\| < \left(\sum_{i=1}^{N_1} y_i' f_i + \sum_{i=N_1+1}^{\infty} y_i^{N_2} f_i \right)(x) + 2\varepsilon$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\left(\left\| \sum_{i=1}^{N_1} x_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i=N_1+1}^{\infty} \quad e_i \right\| \right) + 2\varepsilon$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(1+\varepsilon)+2\varepsilon=\theta.$$

证毕.

11. 具有弱 Banach-Saks 性质而不自反的 Banach 空间.

Banach 空间 l 具有 wBSP(参看例 8),而它并不自反.

12. 自反而不具有弱 Banach-Saks 性质的 Banach 空间.

Partington[237]证明了一个 Banach 空间具有 BSP 当且仅当它既具有 wBSP 又是自反的. 于是,例 9 中的自反 Banach 空间就不具有 wBSP.

13. 具有 Banach-Saks 性质而不超自反的 Banach 空间.

下面的例子属于 Nishiura 和 Waterman[235].

考虑满足下述性质的 Banach 空间类:

存在 $\theta\in(0,1)$,使对每个点列$\{x_n\}$,$\|x_n\|\leqslant 1$. 若$\{x_n\}$ 弱收敛于0,则存在 x_{n_1}与 x_{n_2}使

$$\|x_{n_1}+x_{n_2}\|<2\theta. \tag{1}$$

Kakutani[168]证明了每个一致凸的 Banach 空间满足这个性质的其它形式. 从 Kakutani 的证明易见,这个性质蕴涵 wBSP.

设 B_i是点 $b_i=(b_{i1},\cdots,b_{ii})$所组成的 i 维线性空间,令

$$\|b_i\|=\sup_{1\leqslant j\leqslant i}|b_{ij}|.$$

对 $p>1$,令$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$是点列 $b=\{b_i\}$ 所组成的线性空间,其中 $b_i\in B_i$且满足条件

$$\|b\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Day 证明了空间$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$是自反的,但不线性同胚于任何一个一致凸的Banach空间(参看第七章例 5).因此,$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$不是超

自反的.

兹证空间$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$具有性质(1),从而它具有 wBSP.

设$\{b^n\}$是$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$的单位球中的点列,它弱收敛于0,这里,$b^n=\{b_i^n\}_{i=1}^{\infty}, b_i^n\in B_i(n=1,2,\cdots)$. 给定$\varepsilon>0$,存在$n_0$使

$$\sum_{i>n_0}\|b_i^1\|^p<\varepsilon^p.$$

由于$\{b^n\}$弱收敛于0,故它按坐标收敛于0,因而对充分大的n,有$\sum_{i\leq n_0}\|b_i^n\|^p<\varepsilon^p$. 于是

$$\begin{aligned}\|b^1+b^n\|&\leq\|(b_1^1,\cdots,b_{n_0}^1,b_{n_0+1}^n,\cdots)\|\\&\quad+\|(b_1^n,\cdots,b_{n_0}^n,b_{n_0+1}^1,\cdots)\|\\&=\left(\sum_{i\leq n_0}\|b_i^1\|^p+\sum_{i>n_0}\|b_i^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\quad+\left(\sum_{i\leq n_0}\|b_i^n\|^p+\sum_{i>n_0}\|b_i^1\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq(1+1)^{\frac{1}{p}}+(\varepsilon^p+\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}\\&=2^{\frac{1}{p}}(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

因此,对$\theta\in(2^{\frac{1}{p}-1},1)$,(1)式成立.

空间$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus B_i\right)_p$自反且有 wBSP,故它有 BSP.

14. 自反而不严格凸的 Banach 空间.

对$x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2$,令$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$,则 Banach 空间$(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|)$是自反的,但它不是严格凸的.

15. 没有 Banach-Saks 性质的接近一致凸的 Banach 空间.

Huff[135] 引进了接近一致凸 (nearly uniformly convex)

Banach 空间的概念。Banach 空间 X 称为接近一致凸的，记作 NUC，是指对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta<1$，当 $\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|\leqslant 1$，$\inf\{\|x_n-x_m\|:m\neq n\}>\varepsilon$ 时，则存在 $\alpha_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，满足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\quad \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|\leqslant\delta.$$

Huff 猜测接近一致凸的 Banach 空间具有 BSP. Zhāng wén yào, Yú xīn tài[335]指出，Huff 的猜测是不对的. 他们先给出了 NUC 空间的一个充分条件如下：

定理 设 X 为具有基的自反Banach空间，若满足条件：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta<1$，当 $x\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，$\|P_n x\|>\delta$ 蕴涵 $\|(I-P_n)x\|\leqslant\varepsilon$ 时，则 X 是NUC空间，这里 $P_n x=\sum_{i=1}^{n}a_i x$，若 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$.

反例 我们用 γ 代表正整数的有限非空集，使 γ 的势 $\leqslant\gamma$ 中的最小元素. Γ 代表一切具有上述性质的集 γ 所成的集族. 称 $\gamma<\gamma'$，是指 γ 的最大元 $<\gamma'$ 的最小元. 设 $\gamma\in\Gamma$，又 $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一实数列，定义

$$\sigma(x,\gamma)=\sum_{i\in\gamma}|x_i|.$$

设 $\{\gamma_k\}\subset\Gamma$ 使得 $\gamma_k<\gamma_{k+1}(k\geqslant 1)$，定义

$$\sigma_p(x,\{\gamma_k\})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sigma(x,\gamma_k)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

并定义

$$\|x\|_p=\sup\sigma_p(x,\{\gamma_k\}),1<p<+\infty,$$

这里sup是对一切具有上述性质的集列 $\{\gamma_k\}$ 来取的. 令

$$B_p=\{x=\{x_i\}:\|x\|_p<+\infty\},$$

则 B_p 是没有BSP的自反Banach空间（参看例 9 ）.

兹证 B_p 是NUC空间，设 $\varepsilon>0$，取 $\delta=(1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$，若 $\|P_n x\|>\delta$，则

存在$\{\gamma_k\}\subset\Gamma$适合$\gamma_k<\gamma_{k+1}(k\geqslant 1)$，使得

$$\sigma_p(P_n x,\{\gamma_k\})^p>1-\varepsilon^p.$$

令$\{\gamma_k'\}$是Γ中任一适合$\gamma_k'<\gamma_{k+1}'(k\geqslant 1)$的集列，由于对任一$n$，$\gamma_k\cap\{1,2,\cdots,n\}\subset\Gamma$，$\gamma_k'\cap\{n+1,n+2,\cdots\}\subset\Gamma$，以及对任意$k$，$j$，$\gamma_k\cap\{1,2,\cdots,n\}<\gamma_j'\cap\{n+1,n+2,\cdots\}$（若它们均非空），因而，我们可代$\gamma_k\cap\{1,2,\cdots,n\}$，$\gamma_k'\cap\{n+1,n+2,\cdots\}$以新的集列$\{\gamma_k''\}$，$\gamma_k''<\gamma_{k+1}''(k\geqslant 1)$。由此可见

$$\begin{aligned}
&\sigma_p(P_n x,\{\gamma_k\cap\{1,2,\cdots,n\}\})^p\\
&\qquad+\sigma_p((I-P_n)x,\{\gamma_k'\cap\{n+1,n+2,\cdots\}\})^p\\
&\quad=\sigma_p(x,\{\gamma_k''\})^p\leqslant 1,\\
&\sigma_p(P_n x,\{\gamma_k\})=\sigma_p(P_n x,\{\gamma_k\cap\{1,2,\cdots,n\}\}),\\
&\sigma_p((I-P_n)x,\{\gamma_k'\})\\
&=\sigma_p((I-P_n)x,\{\gamma_k'\cap\{n+1,n+2,\cdots\}\}).
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
\sigma_p((I-P_n)x,\{\gamma_k'\})^p&\leqslant 1-\sigma_p(P_n x,\{\gamma_k\})^p\\
&<1-(1-\varepsilon^p)=\varepsilon^p.
\end{aligned}$$

由于$\{\gamma_k'\}\subset\Gamma$是任意的，因而$\|(I-P_n)x\|\leqslant\varepsilon$。据定理，$B_p$是NUC空间。

16. 一个具有无条件基的自反的Banach空间，它没有线性同胚于$l^p(1\leqslant p<+\infty)$的子空间。

Banach[37]提出下述问题：是否每个无穷维Banach空间都有一个子空间，它或者线性同胚于c_0，或者线性同胚于l^p（对某个$1\leqslant p<+\infty$）？Tsirelson[316]构造了一个具有无条件基的自反 Banach 空间，使对任何$1\leqslant p<+\infty$，它没有线性同胚于l^p的子空间，实际上，它没有线性同胚于一致凸空间的子空间．我们这里介绍的一个例子属于Figiel和Johnson[104]。

令$T_0=E^\infty$，$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$。

对$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in T_0$，令$\|x\|_0=\max_n|a_n|$，而对$m\geqslant 0$，令

$$\|x\|_{m+1}=\max\left\{\|x\|_m,2^{-1}\max\sum_{i=1}^{k}\left\|\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}}a_ne_n\right\|_m\right\},$$

这里，花括号里面的max是对一切$k\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_{k+1}(k=1,2,\cdots)$来取的．显然，对任一$x\in T_0$，$\|x\|=\lim_{m\to\infty}\|x\|_m$存在，并且$\|\cdot\|$定义了$T_0$上的一个范数．又，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$形成$T_0$的完备化空间$T$的一个正规化的无条件基．此外，对任一$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in T$，有

$$\|x\|=\max\left\{\max_n|a_n|,2^{-1}\sup\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}}a_ne_n\right\|,\right.\right.$$

$$\left.\left.k\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_{k+1},k=1,2,\cdots\right)\right\}.$$

因此，对任意k和任一$u_i=\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}}a_ne_n$，$1\leqslant i\leqslant k$，$k\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_{k+1}$，以及$k$个任意数$c_1,\cdots,c_k$，都有

$$\sum_{i=1}^{k}|c_i|\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{k}c_iu_i\right\|\geqslant 2^{-1}\sum_{i=1}^{k}|c_i|. \tag{1}$$

由此可知，T不含有线性同胚于c_0或某个l^p（$1<p<+\infty$）的子空间．其实，还可进一步证明T不含有线性同胚于l的子空间（参看作者原文）．

由于T具有无条件基，且它不含有线性同胚于c_0或l的子空间，因而T是自反的．

关系式(1)实际上还证明了T不含有无穷维的一致凸的子空间．

17．James空间．

James[144]在1950年针对当时猜测"Banach空间X线性同胚于X^{**}推出X是自反的；或X等距同构于X^{**}推出X是自反的；或X^{**}可分推出X是自反的"进行了研究，举出了著名的例子（后来称之为James空间），否定了上述猜测.他的例子如下：

设J为满足下述条件的实数列$x=\{\xi_n\}$所组成的实线性空间：$x=\{\xi_n\}\in J$当且仅当$\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$，并且

$$\|x\|=\sup\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i}})^2+(\xi_{k_{2n+1}})^2\right]^{\frac{1}{2}}<+\infty, \quad (1)$$

其中sup是对一切n及所有可能的有限多个正整数$k_1,\cdots,k_{2n+1}$ $(k_1<k_2<\cdots<k_{2n+1})$取的；由(1)所规定的$\|\cdot\|$为$J$上的范数，并且按此范数构成一个Banach空间.

首先$\|\cdot\|$确为范数，为此只须验证三角不等式成立. 设$x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\}\in J$，由Minkowski不等式得到

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_{k_{2i-1}}+\eta_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i}}-\eta_{k_{2i}})^2+(\xi_{k_{2n+1}}+\eta_{k_{2n+1}})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i}})^2+\xi^2_{k_{2n+1}}\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}(\eta_{k_{2i-1}}-\eta_{k_{2i}})^2+(\eta_{k_{2n+1}})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

所以$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

其次设$x_n=\{\xi_i^{(n)}\}(n=1,2,\cdots)$为$J$中的Cauchy列，则任给$\varepsilon>0$，存在正整数$n_0$，当$m,s\geqslant n_0$时，

$$\|x_s-x_m\|=\sup\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi^{(s)}_{k_{2i-1}}-\xi^{(m)}_{k_{2i-1}}-\xi^{(s)}_{k_{2i}}+\xi^{(m)}_{k_{2i}})^2\right.$$

$$+(\xi_{k_{2n+1}}^{(s)}-\xi_{k_{2n+1}}^{(m)})^2\Big]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon. \tag{2}$$

因此对一切i，有$|\xi_i^{(s)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon(s,m\geqslant n_0)$，故$\{\xi_i^{(m)}\}$对每个$i$皆为Cauchy数列，令

$$\lim_{m\to\infty}\xi_i^{(m)}=\xi_i.$$

记$x=\{\xi_i\}$，兹证$x\in J$. 由(2)知(令$s\to\infty$)

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i-1}}^{(m)}-\xi_{k_{2i}}+\xi_{k_{2i}}^{(m)})^2+(\xi_{k_{2n+1}}-\xi_{k_{2n+1}}^{(m)})^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon,$$

所以$|\xi_{k_{2n+1}}-\xi_{k_{2n+1}}^{(m)}|\leqslant\varepsilon$. 而$\xi_{k_{2n+1}}^{(m)}\to0(n\to\infty)$，故$\xi_{k_{2n+1}}\to0(n\to\infty)$. 同样，从$|\xi_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i-1}}^{(m)}-\xi_{k_{2i}}+\xi_{k_{2i}}^{(m)}|\leqslant\varepsilon$及$\xi_i^{(m)}\to0(i\to\infty)$可得$\xi_{k_{2i}}\to0(i\to\infty)$. 这样一来，$(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$的偶数项及奇数项所组成的子列皆收敛于0，因此$\xi_i\to0(i\to\infty)$.

在(2)中令$s\to\infty$，得到$\|x-x_m\|\leqslant\varepsilon(m\geqslant n_0)$，因此$x-x_m\in J$，但$x_m\in J$，所以$x\in J$，且$x_m\to x$；于是$J$为Banach空间.

James 空间有下列基本性质：

(1) J为可分的Banach空间；$\{e_n\}$是J的收缩的单调基，其中$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$.

(2) $\{e_n\}$不是有界完全的，从而J不是自反的.

(3) J没有无条件基.

(4) J^*没有无条件基，相应于$\{e_n\}$的坐标泛函列是J^*的有界完全基，但不是收缩基.

(5) J与J^{**}等距同构；J的所有共轭空间都是可分的.

注　Edgar[96]研究了所谓长James空间. 作为一个反例，给许多未解决的问题以否定的问答.

18. 非次自反的赋范线性空间.

闭区间[0,1]上的多项式的全体作为Banach空间$C[0,1]$的

子空间是不完备的，它显然不是次自反的.

注 容易证明，Hilbert 空间的稠密子空间都是次自反的. 上述反例说明了 Banach 空间的稠密子空间不必是次自反的.

19. 不完备的次自反空间.

取 X 为 Banach 空间 $l^p(1<p<+\infty)$ 中除去有限个坐标外皆为 0 的元素 $x=\{\xi_n\}$的全体，则 X是一个不完备的赋范线性空间. 显然，X是次自反的.

注 Bishop 和 Phelps[60]于 1961 年指出，每个 Banach 空间都是次自反的. 例 18 和例 19 说明了对于一般的不完备的赋范线性空间，可能是次自反的，也可能不是次自反的.

Lindenstrauss[192]于 1963 年指出，若 X，Y 均为 Banach 空间，且 X是自反的，则 $L(X,Y)$中算子达到范数之集在$L(X,Y)$中稠密.

Schachermayer[276]于 1983 年指出，空间$L(L,C)$中算子达到范数之集在 $L(L,C)$中并不稠密，这里 $L=L[0,1]$，$C=C[0,1]$.

Peck 有例表明，Bishop-Phelps 定理不可推广到 Fréchet 空间.

此外，空间$L(L,L)$中算子达到范数之集在$L(L,L)$中是否稠密？这是尚未解决的一个问题.

20. 具有有界完全基而非几乎自反的 Banach 空间.

Banach 空间X称为几乎自反的(Somewhat reflexive)，是指它的任一无穷维闭子空间都包含一个无穷维自反子空间.

Banach 空间 l 中的基$\{e_n\}$是有界完全的. 事实上，若

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\right\|=\sup_n\sum_{i=1}^n|a_i|<+\infty,$$

则$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<+\infty$，从而$\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i$收敛.

另一方面，l 不含有无穷维的自反子空间，故 l 不是几乎自反的.

注 James[147]证明了，若 Banach 空间 X 具有有界完全基，且 X^* 是可分的，则 X 必是几乎自反的. 上述反例说明了在这个命题中，X^* 可分的条件不可去掉.

Willian 和 Singer[330]指出，几乎自反 Banach 空间的共轭空间未必几乎自反. 几乎自反Banach空间的商空间也未必几乎自反.

21. 非弱紧生成空间.

Trojanski[315]指出，如果一个 Banach 空间是 WCG 空间，那么在它上面可赋予等价的局部一致凸的范数. 由于 Banach 空间 l^∞ 上不存在等价的局部一致凸的范数(参看第七章例 10)，因而 l^∞ 不是 WCG 空间.

22. 既不可分也不自反的弱紧生成空间.

自反空间是 WCG 空间，可分空间也是 WCG 空间，而 WCG 空间既不必自反，也不必可分. 例如，设 Γ 为一不可数的无限集，则 Banach 空间 $c_0(\Gamma)$ 既不可分也不自反. 由于单位向量集 $\{e_r: r\in\Gamma\}$ 是弱紧的，且它张成的线性子空间在 $c_0(\Gamma)$ 中是稠密的，故 $c_0(\Gamma)$ 是一个 WCG 空间.

23. 存在某个不可分 Banach 空间，它的每个闭子空间都是弱紧生成空间.

John 和 Zizler[150]证明了，若 Banach 空间 X 是 WCG 空间，且 X 上具有等价的 Fréchet 可微范数，则 X 的每个闭子空间都是 WCG 空间. 因为 $c_0(\Gamma)$ 是 WCG 空间，且具有等价的 Fréchet 范数(参看第七章例 22)，故 $c_0(\Gamma)$ 的每个闭子空间都是 WCG 空间.

24. 存在某个弱紧生成空间的闭子空间，它不是弱紧生成空间.

WCG 空间是自反空间与可分赋范线性空间的推广，可分空间的子空间可分，自反空间的闭子空间自反，于是，Lindenstrauss[189]

提出问题：WCG 的每个闭子空间是否也是 WCG 空间呢？

Rosenthal 于 1974 年举出了一个反例，说明 WCG 空间的闭子空间不必是 WCG 空间. 他的例子如下：设

$$R=\left\{r\in L[0,1]:\|r\|_1=1,\int_0^1 r(t)dt=0\right\},$$

μ 表示 $[0,1]^R$ 上的乘积测度. 显然，$L(\mu)$是 WCG 空间. 对任意 $r\in R$，定义$[0,1]^R$ 上的函数 f_r，使得对任意 $x\in[0,1]^R$，$f_r(x)=r(x(r))$，则 $f_r\in L(\mu)$. 令 $X_R=\overline{\text{span}}\{f_r:r\in R\}$，可以证明，$X_R\subset L(\mu)$ 不是 WCG 空间.

25. 存在某个弱紧生成空间，其共轭空间不是弱紧生成空间.

易见，Banach 空间 l 是 WCG 空间，而其共轭空间 l^∞ 不是 WCG 空间(参看例 21).

26. 存在某个非弱紧生成空间，其共轭空间是弱紧生成空间.

Johnson 和 Lindenstrauss[152]作出了一个非 WCG 空间 X，使 X^*是 WCG 空间. 他们的例子如下：

用N代表正整数集，令$\{N_r:r\in\Gamma\}$ 为这样的正整数的无限子集族，当 $r_1\neq r_2$ 时，$N_{r_1}\cap N_{r_2}$ 是有限集. 因此，Γ 有连续统的势. 对任一 $r\in\Gamma$，用 C_r 代表集 N_r 的特征函数. 设 X_0 是由$\{C_r:r\in\Gamma\}\cup c_0$ 张成的线性空间，在 X_0 上定义范数为

$$\left|\!\left|\!\left|\sum_{i=1}^k a_{r_i}c_{r_i}+y\right|\!\right|\!\right|=\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^k a_{r_i}c_{r_i}+y\right\|_\infty,\left(\sum_{i=1}^k|a_{r_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

其中 $r_1,\cdots,r_k\in\Gamma$ 是两两相异的，而且 $y\in c_0$，$\|\cdot\|_\infty$为函数的上确界范数. 因为对任一 $x\in X_0$，都有 $a_{r_i}=\lim\limits_{n\to\infty}x(n)(n\in N_{r_i})$，故范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 是完全确定的. 用 X 代表$(X_0,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$的完备化空间，可以证明，$X^*$是 WCG 空间，而$X$ 不是 WCG 空间. 证明细节可参看作者原文.

注 Lindenstrauss[199]提出下述问题：能否作出一个Banach

空间 X，使 X 的偶数阶共轭空间 $X^{(2n)}$ 均非 WCG 空间，而奇数阶共轭空间 $X^{(2n-1)}$ 都是 WCG 空间？

Lindenstrauss 和 Stegll[202]构造了一个 Banach 空间 X，使 $X^{(2n-1)}$ 都是 WCG 空间，而 $X^{(2n)}$ 均非 WCG 空间.

Johnson 和 Lindenstrauss[152]构造了一个 Banach 空间 X，使 (i) X 不是 WCG 空间；(ii) X^* 是 WCG 空间且 X^* 具有无条件基；(iii) X 有等价的 Fréchet 可微范数；(iv) X^* 弱*可分，但 X 没有可嵌入到 l^∞ 的不可分的子空间.

第七章　Banach 空间的凸性、光滑性及范数的可微性

引言

这一章主要处理的是 Banach 空间的凸性、光滑性及范数可微性方面的例子，我们先归纳凸性的各种主要定义，然后指出它们之间的联系.

设 X 是赋范线性空间，$x_n, y_n \in X(n=1,2,\cdots)$. 如果从 $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{(x_n+y_n)}{2}\right\| = 1$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$，则称 X 是一致凸的，或称 X 有一致凸的范数，记作UR.

显然，X 为一致凸的充要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $x, y\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，$\|x-y\|\geqslant \varepsilon$ 时，有 $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \leqslant 1-\delta(\varepsilon)$.

设 X 是赋范线性空间，$x, x_n\in X(n=1,2,\cdots)$. 如果从 $\|x\| = \|x_n\| = 1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x+x_n\| = 2$ 能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$，则称 X 是局部一致凸的，或称 X 有局部一致凸的范数，记作LUR.

显然，X 为局部一致凸的充要条件是，对任意 $\varepsilon>0$ 及任一 $x\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，存在 $\delta(\varepsilon, x)>0$，当 $y\in X$，$\|y\|\leqslant 1$，$\|x-y\|\geqslant \varepsilon$ 时，就有 $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| < 1-\delta(\varepsilon, x)$.

赋范线性空间 X 称为弱局部一致凸的，并记作 wLUR，是指 $x\in X$，$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$，$\|x\| = \|x_n\| = 1$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x+x_n\| = 2$ 时，$\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

显然，X 为弱局部一致凸的充要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，$x\in X$，

$\|x\|=1$，$f\in X^*$，$\|f\|=1$，存在$\delta(\varepsilon,x,f)>0$，当 $y\in X$，$\|y\|=1$，且 $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|>1-\delta(\varepsilon,x,f)$时，就有$|f(x-y)|<\varepsilon$.

赋范线性空间X称为严格凸的，记作 R，是指 X的单位球面 S 不包含任何非平凡的线段.

定理 1 设X是 Banach空间，则下列断言彼此都是等价的.

(i) X是严格凸的.

(ii) S上每一点都是单位闭球$B=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$的端点.

(iii) 对X中任意两点x,y，$\|x\|=\|y\|=1$，当 $x\neq y$ 时，

$$\|x+y\|<\|x\|+\|y\|.$$

(iv) 对X中任意两点x,y，$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$成立当且仅当 $y=0$ 或 $x=\alpha y$，$\alpha\geqslant 0$.

(v) 对每个$f\in X^*$，在S上至多有一个x_0，使$f(x_0)=\|f\|$.

Banach空间X称为中点局部一致凸的，记作 MLUR，是指 x，x_n，$y_n\in X$，使$\|x\|=1$，$\|x_n\|\to 1$，$\|y_n\|\to 1$且$\|2x-(x_n+y_n)\|\to 0$，则 $x_n-y_n\to 0$.

显然，X 为中点局部一致凸的充要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，$x\in X$，$\|x\|=1$，存在$\delta(\varepsilon,x)>0$，使得当 $x_1,x_2\in X$，$\|x_1\|=\|x_2\|=1$，$\left\|x-\frac{(x_1+x_2)}{2}\right\|<\delta(\varepsilon,x)$时，就有$\|x_1-x_2\|<\varepsilon$.

称赋范线性空间X有性质H，是指 $x,x_n\in X$，当$\|x_n\|\to\|x\|$，$\{x_n\}$弱收敛于x时，有$\|x_n-x\|\to 0$.

若赋范线性空间X既是H又是R，则记X为HR.

赋范线性空间X称为各向一致凸的，记作URED，是指当非零元$z\in X$，$x_n,y_n\in X$，使$\|x_n\|\to 1$，$\|y_n\|\to 1$，$\|x_n+y_n\|\to 2$，$x_n-y_n=\alpha_n z$时，$\alpha_n\to 0$.

赋范线性空间 X称为弱一致凸的，并记作wUR，是指 $x_n,y_n\in X$，使$\|x_n\|\to 1$，$\|y_n\|\to 1$，$\|x_n+y_n\|\to 2$时，$\{x_n-y_n\}$弱收敛于0.

赋范线性空间X称为弱紧集方向一致凸的，并记作URwC，是

指$z\in X$，$x_n, y_n\in X$，使$\|x_n\|\to1$，$\|y_n\|\to1$，$\|x_n+y_n\|\to2$，$\{x_n-y_n\}$弱收敛于z时，$z=0$。

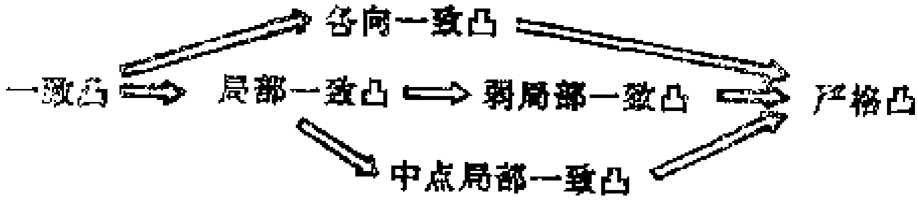
设$(X,\|\cdot\|_X)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$都是 Banach空间，$T:(X,\|\cdot\|_X)\to(Y,\|\cdot\|_Y)$为连续线性算子. 对$x\in X$，令

$$|\!|\!|x|\!|\!|=(\|x\|_X^2+\|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}},$$

则$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$也是X上的范数，且与原范数$\|\cdot\|_X$等价.

定理 2　若$(X,\|\cdot\|_X)$具有上述定义的某种凸性，则$(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$也相应地具有这种凸性.

Banach空间各种主要凸性之间的关系如下图所示：



设X是Banach空间，$x_0\in X$，$\|x_0\|=1$. 如果对任意的$y\in X$，$\|y\|=1$，极限

$$\lim_{t\to0}\frac{(\|x_0+ty\|-\|x_0\|)}{t}$$

存在(对y一致存在)，则称X在x_0有Gateaux (Fréchet) 可微范数. 如果X的范数在X的单位球面S上的每一点是Gateaux(Fréchet)可微的，那么我们称X有 Gateaux(Fréchet)可微范数，简称$G(F)$可微.

设X为 Banach空间，一个从X到共轭空间X^*的映射$x\to f_x$如果(i)$\|x\|=1\Rightarrow\|f_x\|=1=f_x(x)$，(ii)$t\geqslant0\Rightarrow f_{tx}=tf_x$，则称它是支撑映射.

设X为Banach 空间，$S(X)$为X中的单位球面，$x_0\in S(X)$. 如果$J_X(x_0)$在$S(X^{***})$中有唯一的支撑映射，则称x_0为X的非常光滑点；如果每个$x\in S(X)$都是X的非常光滑点，则称X为非常光滑的，其中J_X表示从X到X^{**}的典则映射.

如果$x_0\in S(X)$在$S(X^*)$中有唯一的支撑映射，则称x_0为X

的光滑点. 若每个$x\in S(X)$都是X的光滑点，则称X是光滑空间.

定理 3 若X是Banach空间，则下列断言彼此等价：

(i) x_0是光滑点.

(ii) 每个支撑映射$\sigma: S(X)\to S(X^*)$在x_0是范数一弱*连续的.

(iii) 存在一个支撑映射$\sigma: S(X)\to S(X^*)$，它是范数一弱*连续的.

(iv) 范数在x_0是G可微的.

定理 4 若X是Banach空间，则下列断言彼此等价：

(i) x_0是非常光滑点.

(ii) 若$\{x_n^*\},\{y_n^*\}\subset S(X^*)$，且$x_n^*(x_0)\to 1, y_n^*(x_0)\to 1$，则

$$x_n^*-y_n^*\xrightarrow{\text{弱}}0.$$

(iii) 每个支撑映射$\sigma: S(X)\to S(X^*)$在x_0是范数一弱连续的.

(iv) 存在一个支撑映射$\sigma: S(X)\to S(X^*)$，它在x_0是范数一弱连续的.

一个Banach空间X称为Asplund空间，是指X的每个开凸子集E上定义的连续凸函数f在E的一个稠密G_δ子集上是(F可微)的.

一个Banach空间X称为弱Asplund空间，是指X的每个开凸子集E上定义的连续凸函数f在E的一个稠密G_δ子集上是G可微的.

Asplund空间有许多等价条件和重要性质，读者可参看[16]，这里不再赘述.

1. 存在某个赋范线性空间中的点列$\{x_n\}$，使$\{x_n\}$弱收敛于x_0且$\|x_n\|\to\|x_0\|$，但$\{x_n\}$并不强收敛于x_0.

可以证明，若X是一个一致凸的赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，则为使$\{x_n\}$强收敛于$x_0\in X$，当且仅当$\{x_n\}$弱收敛于x_0且$\|x_n\|\to$

$\|x_0\|$. 对于非一致凸的赋范线性空间，这一陈述并不成立. 例如，在Banach空间c中取$x_n=(1,\cdots,1,0,\cdots)$，$x_0=(1,1,\cdots)$. 任取$f=\{f_i\}\in c^*=l$，均有

$f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}f_i\to\sum_{i=1}^{\infty}f_i=f(x_0)(n\to\infty)$，故$\{x_n\}$弱收敛于$x_0$. 又，$\|x_n\|=\|x_0\|=1$，故$\|x_n\|\to\|x_0\|$. 但

$$\|x_n-x_0\|=\|(0,\cdots,0,1,1,\cdots)\|=1,$$

可见$\{x_n\}$不强收敛于x_0.

注 Кадец[156]指出，若X为一可分Banach空间，则在X上可引入与原范数等价的新范数$\|\cdot\|_1$，使X在此新范数下，对任一弱收敛于x_0的点列$\{x_n\}$，只要有$\|x_n\|_1\to\|x_0\|_1$，就可导出$\{x_n\}$强收敛于x_0.

Riesz证明了，设$x,x_n\in L^p[a,b](1<p<+\infty)$. 若$\{x_n\}$弱收敛于$x$，且$\|x_n\|_p\to\|x\|_p$，则$\{x_n\}$强收敛于$x$，即$\|x_n-x\|_p\to 0$.

Kakutani指出，对于一致凸Banach空间，上述命题也成立，从而推广了Riesz定理.

Browder证明了，一致凸的条件还可减弱为局部一致凸，但不能减弱到弱局部一致凸. Browder进而研究使Riesz定理成立的赋范线性空间的特征，他称这种空间为具有性质H的空间. 所谓赋范线性空间X具有性质H，是指当$\|x_n\|\to\|x\|$，$x_n\xrightarrow{弱}x$时，必有$\|x_n-x\|\to 0$. Browder指出，具有性质H的赋范线性空间未必严格凸，从而又引进所谓具有性质HR的赋范线性空间：赋范线性空间X叫做具有性质HR，是指X具有性质H且严格凸. Browder指出，具有性质HR的赋范线性空间未必自反.

2. 一个一致凸赋范线性空间上的非零连续线性泛函，它在单位闭球上取不到极大值.

在线性空间E^∞上取范数$\|x\|=(\sum_n|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$，其中$x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，则$E^\infty$为一不完备的赋范线性空间. 可证$E^\infty$是一致凸的. 事实

上，任给$\varepsilon>0$，令$\delta=\frac{\varepsilon^2}{4}$，则当$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，且$\|x+y\|>2-\delta$时，由等式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

得到

$$\|x-y\|^2\leqslant 4-\|x+y\|^2<4-(2-\delta)^2$$
$$=4\delta-\delta^2<4\delta<\varepsilon^2,$$

所以$\|x-y\|<\varepsilon$，也就是说，E^∞是一致凸的.

令 $f(x)=\sum_n \frac{\xi_n}{n}$，则$f$是$E^\infty$上的线性泛函，且

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

故f是有界的，从而也是连续的，且

$$\|f\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

另一方面，对任意正整数m，取$x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{m},0,\cdots\right)$，则

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\frac{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}}{\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故得到 $\|f\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|\neq 0\\ x\in E^\infty}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geqslant\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

由于m是任取的，因而

$$\|f\|\geqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

比较(1)，(2)，得到$\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

现任取 $x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，使$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{m}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$，则

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{m}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\|f\|.$$

因此，f 在单位闭球上不能取得极大值$\|f\|$.

注 一致凸 Banach 空间上的非零连续线性泛函在单位闭球上必能取得极大值(参看[326],p. 110). 上述反例表明对一致凸的非 Banach 空间而言,这一命题并不成立.

3. 不可分的一致凸 Banach 空间.

如所周知,可分的 Banach 空间不必是一致凸的. 例如，可分 Banach 空间 l 并不一致凸. 那么，一致凸的 Banach 空间是否必定可分呢？这个问题的答案也是否定的. 反例如下：

设 Γ 是一个不可数的实数集，$l^2(\Gamma)$ 代表定义在 Γ 上具有下述性质的实值函数 $x(t)$的全体,使得集合$\{t\in\Gamma:x(t)\neq 0\}$是可数集或者是有限集，且满足$\sum\limits_{t\in\Gamma}|x(t)|^2<+\infty$.

我们在 $l^2(\Gamma)$上定义通常的线性运算,则$l^2(\Gamma)$为一线性空间. 在 $l^2(\Gamma)$上定义范数

$$\|x\|=\left(\sum_{t\in\Gamma}|x(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

不难验证，$l^2(\Gamma)$ 为 Banach 空间. 对每一 $s\in\Gamma$，令 $x_s(t)=1$，$t=s$；$x_s(t)=0$，$t\neq s$，则$\|x_s-x_{s'}\|=\sqrt{2}\,(s,s'\in\Gamma,\ s\neq s')$. 由此可知

$$B\left(x_s,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cap B\left(x_{s'},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\varnothing,$$

其中$B\left(x_s,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$代表以 x_s 为球心,$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的开球. 显然，

$\left\{B\left(x_s,\frac{\sqrt{2}}{2}\right):s\in\Gamma\right\}$为不可数集.

现在任取 $l^2(\Gamma)$ 中的一个稠密子集 E，则 E 必和每个开球 $B\left(x_\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 相交．在每个球 $B\left(x_\alpha,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 中取一个属于 E 中的点，则这种点互不相同．所有这种点作为 E 的一个子集，它是不可数的，从而 E 也是不可数的，因此 $l^2(\Gamma)$ 不可分．

另一方面，不难验证 $l^2(\Gamma)$ 是一个一致凸的 Banach 空间．

4．一致凸而不自反的赋范线性空间．

Milman 和 Pettis[246] 曾证明了：一致凸的 Banach 空间必定是自反的．应当注意，一致凸的赋范线性空间未必自反．例如，在线性空间 E^∞ 上取范数．

$$\|x\|=\left(\sum_n|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in E^\infty$，则 E^∞ 为一不完备的一致凸赋范线性空间（参看例 2）．因为自反空间必是完备的，而 E^∞ 不完备，故它并不自反．

注　一致凸 Banach 空间的概念是由 Clarkson[71] 在 1936 年讨论向量值测度的 Radon-Nikodym 定理时引入的．一致凸 Banach 空间是目前知道的具有最强凸性的 Banach 空间，并且是目前知道的在几何性质方面弱于 Hilbert 空间的最强空间．

5．一个自反 Banach 空间，在它上面不能赋予与原范数等价的一致凸范数．

设 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 皆为 Banach 空间，令 $E=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$ 是这样的点 $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots)$ 所组成的线性空间，其中 $x_i\in E_i$ 且

$$\|x\|_E=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\quad(1<p<+\infty).$$

这里，线性运算定义为

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_i+y_i,\cdots),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_i,\cdots).$$

不难证明，$\|\cdot\|_E$是E上的一个范数，且$(E,\|\cdot\|_E)$为Banach空间.

定理 为使Banach空间$E=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$是自反的，当且仅当每个$E_i$都是自反的.

证 可以证明，等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p^*=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i^*\right)_q \tag{1}$$

成立，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由等式(1)得到

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p^{**}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i^*\right)_q^*=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i^{**}\right)_p,$$

因而定理的结论成立.

现在我们着手构造一个自反的Banach空间，在它上面不能赋予等价的一致凸范数.

设E_i是由点$x_i=(x_{i1},\cdots,x_{ii})$所组成的$i$维线性空间，并定义范数为

$$\|x_i\|_{E_i}=\sup_{1\leqslant j\leqslant i}|x_{ij}|.$$

因E_i是有限维赋范线性空间，故E_i是自反的Banach空间. 于是据上述定理，$E=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$也是自反的Banach空间. 兹证不能在$E$上赋予等价的一致凸的范数. 反设在$E$上能赋予一个新范数$|\!|\!|x|\!|\!|$，适合(i) $|\!|\!|x|\!|\!|$等价于$\|x\|$，(ii)范数$|\!|\!|x|\!|\!|$是一致凸的. 于是存在常数m,M，使

$$m\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant M\|x\|\ (0<m\leqslant M<+\infty).$$

不失一般性，可取 $m=1$，于是 $\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant M\|x\|(1\leqslant M<+\infty)$. 对任意固定的 i，容易证明，在 E_i 上的相应的范数也等价，即

$$\|x_i\|_{E_i}\leqslant|||x_i|||_{E_i}\leqslant M\|x_i\|_{E_i}.$$

令 $K_i=\{x_i:|||x_i|||_{E_i}\leqslant 1\}$ 是 E_i 中的单位球. 易见，

$$\left\{x_i:\|x_i\|_{E_i}\leqslant\frac{1}{M}\right\}\subset K_i\subset\{x_i:\|x_i\|_{E_i}\leqslant 1\}.$$

令 $\alpha=\dfrac{1}{M}$，则 $(\varepsilon_1\alpha,\cdots,\varepsilon_i\alpha)\in K_i$，这里，$\varepsilon_j=\pm1$，$j=1,2,\cdots,i$. 考虑 $x=(\alpha,\cdots,\alpha)$，$x'=(\alpha,\cdots,\alpha,-\alpha)$，则

$$\frac{(x+x')}{2}=(\alpha,\cdots,\alpha,0),$$

$$x-x'=(0,\cdots,0,2\alpha),$$

所以 $|||x-x'|||_{E_i}\geqslant\|x-x'\|_{E_i}=2\alpha$. 于是由范数 $|||\cdot|||$ 的一致凸性可知存在 $\delta=\delta(2\alpha)$，使 $\left|\left|\left|\dfrac{(x+x')}{2}\right|\right|\right|_{E_i}\leqslant 1-\delta(2\alpha)$，即

$$\left|\left|\left|\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\cdots,\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\ 0\right)\right|\right|\right|_{E_i}\leqslant 1.$$

令 $x_1=\left(\dfrac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\cdots,\dfrac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},0\right)$，则 $x_1\in K_i$. 类似地，令 $x_1'=\left(\dfrac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\cdots,\dfrac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\ \dfrac{-\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},0\right)$，则 $x_1'\in K_i$，且

$$|||x_1-x_1'|||_{E_i}\geqslant\|x_1-x_1'\|_{E_i}=\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))}.$$

注意到范数 $|||\cdot|||$ 的一致凸性，可见

$$\frac{|||x_1+x_1'|||_{E_i}}{2}\leqslant 1-\delta\left(\frac{2\alpha}{(1-\delta(2\alpha))}\right).$$

因为当 $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$ 时，$\delta(\varepsilon_2)\leqslant\delta(\varepsilon_1)$，而今 $\dfrac{2\alpha}{(1-\delta(2\alpha))}\geqslant 2\alpha$，所以 $\delta\left(\dfrac{2\alpha}{(1-\delta(2\alpha))}\right)\geqslant\delta(2\alpha)$，从而

$$\frac{\|\!| x_1+x_1' |\!\|_{E_i}}{2}\leqslant 1-\delta(2\alpha),$$

即

$$\left\|\!\left|\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},\cdots,\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))},0,0\right)\right|\!\right\|_{E_i}\leqslant 1-\delta(2\alpha),$$

或

$$\left\|\!\left|\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},\cdots,\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},0,0\right)\right|\!\right\|_{E_i}\leqslant 1.$$

同理，令

$$x_2=\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},\cdots,\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},0,0\right),$$

$$x_2'=\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},\cdots,\frac{-\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},0,0\right),$$

则

$$\|\!| x_2-x_2' |\!\|_{E_i}\geqslant\| x_2-x_2'\|_{E_i}=\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2},$$

$$\frac{\|\!| x_2+x_2' |\!\|_{E_i}}{2}\leqslant 1-\delta\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^2}\right)\leqslant 1-\delta(2\alpha).$$

一般，令

$$x_j=\left(\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^j},\cdots,\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^j},0,\cdots,0\right),$$

则

$$\delta\left(\frac{2\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^j}\right)\geqslant\delta(2\alpha),$$

$$\|\!| x_j |\!\|_{E_i}\leqslant 1\ (j=1,2,\cdots,i-1),$$

特别有 $\|\!| x_{i-1} |\!\|_{E_i}\leqslant 1$.

另一方面，$1-\delta(2\alpha)<1$，而 α 是固定的实数，故当 i 充分大后，可得 $\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^{i-1}}>1$，因而

$$\|\!| x_{i-1} |\!\|_{E_i}\geqslant\| x_{i-1}\|_{E_i}=\frac{\alpha}{(1-\delta(2\alpha))^{i-1}}>1.$$

此与$\|x_{i-1}\|_{E_i}\leqslant 1$相矛盾．因此不能在$E$上赋予一个与原范数等价的一致凸的范数．

上面的构造法属于Day[78]．

注 上述反例也说明了 Milman-Pettis 定理的逆定理不成立．

Casazza，Bor-Luh Lin 和 Lohman 构造了 James 空间中的一个相补的自反子空间，它不是一致凸的．

6．局部一致凸而非自反的 Banach 空间．

设$(X,\|\cdot\|)$是可分而非自反的 Banach 空间，则在X上可赋予等价的局部一致凸的范数$|||\cdot|||$（参看[15]，p. 123）．由于$(X,\|\cdot\|)$与$(X,|||\cdot|||)$是线性同胚的 Banach 空间且$(X,\|\cdot\|)$不自反，故$(X,|||\cdot|||)$也不自反．

注 局部一致凸的概念是由 Lovagloa[211]引进的．

7．存在某个非自反的不可分 Banach 空间，在它上面可赋予等价的局部一致凸的范数．

可以证明，在任何一个可分 Banach 空间上，均可赋予与原范数等价的一个局部一致凸范数．应当注意这个命题之逆不真，Rainwater[253]有例如下：

设Γ为一非空集，令

$c_0(\Gamma)=\{x(\gamma):\Gamma\xrightarrow{x}\mathbf{R}^1$，对任给$\varepsilon>0$，$\{\gamma:|x(\gamma)|\geqslant\varepsilon\}$是有限集$\}$．

由$c_0(\Gamma)$的定义可知，对每个$x\in c_0(\Gamma)$，集$\{\gamma\in\Gamma:x(\gamma)\neq 0\}$至多为一可数集．把此可数集称为$x$的可数支撑，记为$E(x)=\{\alpha_k\}$．令

$$\|x\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|=\sup_{\alpha_k\in E(x)}|x(\alpha_k)|,$$

则$\|\cdot\|$为$c_0(\Gamma)$上的范数，按通常的线性运算及范数$\|\cdot\|$，$c_0(\Gamma)$为 Banach 空间．当Γ为可数集时，$c_0(\Gamma)$即为通常的c_0，而当Γ为不可数集时，$c_0(\Gamma)$不可分．

设$x\in c_0(\Gamma)$，$E(x)=\{\alpha_k\}$为x的可数支撑，可以假定$|x(\alpha_k)|$

$\geqslant|x(a_{k+1})|, k=1,2,\cdots$. 作算子 $D: c_0(\Gamma)\to l^2(\Gamma)$

$$(Dx)(\gamma)=\begin{cases}x(a_k)\cdot 2^{-k}, \gamma=a_k\in E(x),\\ 0, \qquad 其它,\end{cases}$$

其中 $l^2(\Gamma)$ 为 Γ 上满足条件 $\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$ 的实值函数全体，当 $x\in l^2(\Gamma)$ 时，规定范数

$$\|x\|_{l^2(\Gamma)}=\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

虽然算子 D 是非线性的，但可证明 $p(x)=\|Dx\|_{l^2(\Gamma)}$ 为 $c_0(\Gamma)$ 上与原范数 $\|\cdot\|$ 等价的范数. p 叫做 Day 范数，是由 Day 给出的. 还可证明，p 为 $c_0(\Gamma)$ 上的局部一致凸范数，证明细节可参看作者原文.

注 Zizler[337]指出，可分 Banach 空间 l 上不能赋予与原范数等价的弱一致凸的范数.

8. 不能赋予等价的严格凸范数的 Banach 空间.

Clarkson[77] 指出，每个可分 Banach 空间上都可赋予等价的严格凸范数. 其实，还可进一步证明，每个可分 Banach 空间上都可赋予等价的局部一致凸范数(参看[15]，p.123). 另一方面，也存在不可分 Banach 空间，可在其上赋予等价的局部一致凸范数(参看例 7).

那么，是否对每个 Banach 空间，都能赋予等价的严格凸的范数呢？这个问题的答案是否定的. Day[79]有例如下：

设 Γ 为一非空集，$l^\infty(\Gamma)$ 是在 Γ 上定义的有界的实值函数全体，对每个 $x\in l^\infty(\Gamma)$，令

$$\|x\|=\sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|,$$

则 $l^\infty(\Gamma)$ 按此范数为一个 Banach 空间.

$l_0^\infty(\Gamma)$ 为 $l^\infty(\Gamma)$ 中使 $\{\gamma\in\Gamma: x(\gamma)\neq 0\}$ 至多为可数集的元素 x

所成之集，显然，$l_0^\infty(\Gamma)$为$l^\infty(\Gamma)$的闭子空间，当Γ为可数集时，$l_0^\infty(\Gamma)$及$l^\infty(\Gamma)$就是通常的 Banach 空间l^∞.

兹证当Γ为不可数集时，在$l_0^\infty(\Gamma)$上不能赋予等价的严格凸范数；$l^\infty(\Gamma)$亦然.

设U为$l_0^\infty(\Gamma)$中的单位球，对于$x\in l_0^\infty(\Gamma)$，$\|x\|=1$，令

$$F_x=\{y\in U: y(\tau)=x(\tau), \text{当 } x(\tau)\neq 0 \text{ 时}\}.$$

如果$l_0^\infty(\Gamma)$上有与$\|\cdot\|$等价的范数$\|\cdot\|_1$，那么有$K\geqslant 1$，使

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant K\|x\|,\quad x\in l_0^\infty(\Gamma).$$

令$M_x=\sup\{\|y\|_1: y\in F_x\}$，$m_x=\inf\{\|y\|_1: y\in F_x\}$. 当$\|x\|=1$时，显然有$M_x\leqslant K$，$m_x\geqslant 1$. 下面我们证明有等式

$$M_x+m_x=2\|x\|_1. \tag{1}$$

事实上，任给$\varepsilon>0$，取$y\in F_x$使$\|y\|_1<m_x+\varepsilon$. 由于$\|x\pm(y-x)\|\leqslant 1$，且当$x(\tau)\neq 0$时，$x(\tau)\pm(y(\tau)-x(\tau))=x(\tau)$，所以$x\pm(y-x)\in F_x$，因此

$$\begin{aligned}2\|x\|_1&=\|x+(y-x)+x-(y-x)\|_1\\&\leqslant\|x+(y-x)\|_1+\|x-(y-x)\|_1\\&\leqslant m_x+\varepsilon+M_x.\end{aligned}$$

令$\varepsilon\to 0$得$2\|x\|_1\leqslant m_x+M_x$. 同理取$y\in F_x$，$\|y\|_1>M_x-\varepsilon$，仿上可得$2\|x\|_1\geqslant M_x+m_x$. 因此(1)式得证.

把(1)式改写为$m_x=2\|x\|_1-M_x$. 取$x_1\in l_0^\infty(\Gamma)$，$\|x_1\|=1$，$\|x_1\|_1>\dfrac{(3K+1)}{4}$(注意，由于取$K$为使不等式$\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant K\|x\|$成立的最小数，所以满足上述条件的$x_1$是存在的)，那么

$$m_{x_1}=2\|x_1\|_1-M_{x_1}\geqslant\frac{(3K+1)}{2}-K=\frac{(K+1)}{2},$$

$$M_{x_1}-m_{x_1}\leqslant K-\frac{(K+1)}{2}=\frac{(K-1)}{2}.$$

再取$x_2\in F_{x_1}$，使$\|x_2\|_1\geqslant\dfrac{(3M_{x_1}+\|x_1\|_1)}{4}$(这样的$x_2$是存在的)，

从 $x_2\in F_{x_1}$ 知 $F_{x_2}\subset F_{x_1}$，所以 $M_{x_1}\geqslant M_{x_2}$. 于是

$$m_{x_2}=2\|x_2\|_1-M_{x_2}\geqslant\frac{(3M_{x_1}+\|x_1\|_1)}{2}-M_{x_1}$$

$$=\frac{(M_{x_1}+\|x_1\|_1)}{2},$$

$$M_{x_2}-m_{x_2}\leqslant M_{x_1}-m_{x_2}\leqslant\frac{(M_{x_1}-\|x_1\|_1)}{2}$$

$$\leqslant\frac{(M_{x_1}-m_{x_1})}{2}\leqslant\frac{(K-1)}{2^2}.$$

如上依次做下去，得到点列$\{x_n\}\subset l_0^\infty(\Gamma)$，对每个 n，$x_{n+1}\in F_{x_n}$，并且

$$0\leqslant M_{x_n}-m_{x_n}\leqslant\frac{(K-1)}{2^n},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}M_{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}m_{x_n}=\mu$. 显然，对每个 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_{x_n}$，有不等式

$$m_{x_n}\leqslant\|y\|_1\leqslant M_{x_n},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此 $\|y\|_1=\mu$.

现如下确定一个 $x\in l_0^\infty(\Gamma)$：若对一切 n，$x_n(r)=0$，则令 $x(r)=0$；若有 n，使 $x_n(r)\neq0$，则令 $x(r)=x_n(r)$. 由于 $F_{x_{n+1}}\subset F_{x_n}$，当 $x_m(r)\neq0$ 时，对一切 $n\geqslant m$，皆有 $x_n(r)=x_m(r)$，所以 x 是唯一确定的. 对此 x，可知 $y\in F_x$ 当且仅当 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_{x_n}$. 因此对 F_x 中的一切 y，皆有

$$\|y\|_1=\|x\|_1=\mu.$$

由于 Γ 为不可数集，可知 F_x 中有无穷多个元素. 设 $y_1,y_2\in F_x$，则

$$\|\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\|\leqslant1.$$

当 $x(r)\neq0$ 时，$y_1(r)=y_2(r)=x(r)$，所以

$$(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)(\gamma)=x(\gamma).$$

因此 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in F_x$，$\|\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\|_1=\mu$. 这样一来，$l_0^\infty(\Gamma)$在范数$\|\cdot\|_1$下的球$\{z\in l_0^\infty(\Gamma):\|z\|_1\leqslant\mu\}$不是严格凸的，所以$\|\cdot\|_1$不是严格凸的. 上述说明$l_0^\infty(\Gamma)$中任何一个与原范数$\|\cdot\|$等价的范数均不是严格凸的.

注 当Γ为可数集时，不可分 Banach 空间 $l_0^\infty(\Gamma)$，即通常的l^∞却可赋予等价的严格凸范数. 事实上，因c_0是可分Banach空间，故 c_0 有等价的严格凸范数$\|\cdot\|_1$，记 $Y=(c_0,\|\cdot\|_1)$，作映射T

$$x=\{\xi_n\}\in l^\infty\to Tx=\left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}\in c_0.$$

容易证明，T 是由l^∞到Y的一对一的连续线性算子. 因此，在 l^∞上可赋予等价的严格凸范数(参看[15]，pp.104—105).

9. 存在某个可分且严格凸的 Banach 空间，而不能赋予等价的一致凸范数.

设$E=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$是例 5 中的 Banach 空间. 我们首先证明，为使E是严格凸的，当且仅当每个 E_i都是严格凸的. 事实上，设 $E_i(i=1,2,\cdots)$都是严格凸的，且设$\|x\|_E=\|x'\|_E=1$，$\|x+x'\|_E=2$，则

$$\begin{aligned}2&=\|x+x'\|_E\\&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i+x_i'\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i'\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|x\|_E+\|x'\|_E=2.\end{aligned}\tag{1}$$

由$\|x+x'\|_E=\|x\|_E+\|x'\|_E$ 得到$\|x_i+x_i'\|_{E_i}=\|x_i\|_{E_i}+\|x_i'\|_{E_i}$. 由于 E_i都是严格凸的，故存在 $\lambda_i>0$，使 $x_i=\lambda_i x_i'$，于是$\|x_i\|_{E_i}=\lambda_i\|x_i'\|_{E_i}$. 又因为(1)成为等式，故$\|x_i\|_{E_i}=\lambda\|x_i'\|_{E_i}$. 由此可知，

$\lambda_i=\lambda, x_i=\lambda x_i'(i=1,2,\cdots)$，从而$X=\lambda X'$，即$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$是严格凸的。

反之，设$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$是严格凸的，且设$\|x_i\|_{E_i}+\|x_i'\|_{E_i}=\|x_i+x_i'\|_{E_i}$，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i+x_i'\|_{E_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{E_i}+\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i'\|_{E_i},$$

故$\|x_i\|_{E_i}=\lambda\|x_i'\|_{E_i}$，从而 Minkowski 不等式成为等式，因而得到

$$\begin{aligned}\|x+x'\|_E&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i+x_i'\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\|x_i\|_{E_i}+\|x_i'\|_{E_i})^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i'\|_{E_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|x\|_E+\|x'\|_E.\end{aligned}$$

由于$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus E_i\right)_p$是严格凸的，故$X=\lambda'X$，从而$x_i=\lambda x_i'$，即每个$E_i$都是严格凸的。

设E_i是由点$x_i=(x_{i1},\cdots,x_{ii})$所组成的$i$维赋范线性空间，其范数定义为$\|x_i\|_{E_i}=\sup\limits_{1\leqslant j\leqslant i}|x_{ij}|$，则$E_i$是可分且自反的 Banach 空间。因此，在$E_i$上可赋予一个等价的严格凸的范数，在此新范数下，$E_i$是可分、自反且严格凸的 Banach 空间，从而$E$也是可分、自反且严格凸的Banach空间。然而由例 5 可知，不能在E上赋予等价的一致凸范数。

这个结果也是由 Day[79]得到的。

注 上述反例也说明了严格凸的 Banach 空间不必是一致凸的.

10. 严格凸而不弱局部一致凸的 Banach 空间.

在 Banach 空间 l^∞ 上可赋予等价的严格凸范数（参看例 8 的注）. Lindenstrauss[189]指出,不能在 l^∞ 上赋予等价的弱局部一致凸的范数，证明细节可参看作者的原文.

11. 弱局部一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间.

对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$, 令 $x'=(0,\xi_2,\xi_3,\cdots)$, 并在 l^2 上定义下述等价范数：

$$\|x\|_s=\max\{|\xi_1|,\|x'\|_2\},$$

这里, $\|x'\|_2=\left(\sum\limits_{i=2}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 设 $\{\alpha_i\}$ 是递减且趋于零的正实数列，定义由 l^2 到 l^2 的连续线性算子 T 如下：

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_1,\alpha_2\xi_2,\alpha_3\xi_3,\cdots).$$

对 $x\in l^2$, 令 $\|x\|_w=(\|x\|_s^2+\|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, 这里 $\|\cdot\|_2$ 表示 l^2 上的通常范数. 易见, $\|\cdot\|_w$ 是 l^2 上的等价范数，且是弱局部一致凸的（参看[193]).

兹证 $\|\cdot\|_w$ 不是中点局部一致凸的，从而更不是局部一致凸的.

事实上, 令 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\alpha e_1$, $x_n=\alpha(e_1+e_n)$, $y_n=\alpha(e_1-e_n)$, 则 $\|x\|_w=1$, $\|x_n\|_w\to1$, $\|y_n\|_w\to1$, $\|2x-(x_n+y_n)\|_w\to0$, 但 $\|x_n-y_n\|_w\to\sqrt{2}$. 因此, $\|\cdot\|_w$ 不是中点局部一致凸的.

12. 局部一致凸而非一致凸的 Banach 空间.

对每个 $u\in c_0(\Gamma)$, $\{r\in\Gamma: u(r)\neq0\}$ 至多为可数集, 记此可数集为 $E(u)=\{c_k\}$. 令

$$\|u\|=\sup_{r\in\Gamma}|u(r)|,$$

则$c_0(\Gamma)$在此范数下为Banach空间. 定义映射$D: c_0(\Gamma)\to l^2(\Gamma)$如下：

$$(Du)(r)=\begin{cases}\dfrac{u(\alpha_k)}{2^k}, & r=\alpha_k\in E(u),\\ 0, & r\notin E(u).\end{cases}$$

令$\|u\|=\|Du\|_2$, $\|\cdot\|$是$c_0(\Gamma)$上的等价的且是局部一致凸的范数（参看例7）.

对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$u=\Big(\frac{\|x\|_2}{2},\xi_1,\xi_2,\xi_2,\cdots,\overbrace{\xi_j,\cdots,\xi_j}^{j\text{个}},\cdots\Big),$$

并称u是相伴于x的元素. 显然，$u\in c_0$. 在l^2上定义范数$\|\cdot\|_L$如下：

$$\|x\|_L=\|u\|.$$

易见，$\|\cdot\|_L$是l^2上的一个等价范数.

现指出，$\|\cdot\|_L$是局部一致凸的. 为此取$x\in l^2, x_n\in l^2$, $n=1,2,\cdots$，使$\|x\|_L=1$, $\|x_n\|_L\to1$, $\|x+x_n\|_L\to2$，并设u与u_n分别是相伴于x与x_n的元素，则易见$\|u\|=1$, $\|u_n\|\to1$, $\|u+u_n\|\to2$. 由于$\|\cdot\|$是局部一致凸的，故$u_n\to u$，于是$\|x_n\|_2\to\|x\|_2$，且对每一j，有$\xi_j^{(n)}\to\xi_j$. 因此，$\{x_n\}$弱收敛于x，从而再由$\|x_n\|_2\to\|x\|_2$可知$x_n\to x$，即$\|\cdot\|_L$是局部一致凸的.

最后证明，$\|\cdot\|_L$不是各向一致凸的，从而也不是一致凸的. 事实上，对每一n，令$x_n=e_1-\sqrt{3}\,e_n$, $y_n=\sqrt{3}\,e_n$, 则$\|x_n\|_L\to1$, $\|y_n\|_L\to1$, $\|x_n+y_n\|_L\to2$. 但对每一n，有$x_n+y_n=e_1$，故$\|\cdot\|_L$不是各向一致凸的.

13. 严格凸而非中点局部一致凸的 Banach 空间.

第一例　例 11 中的空间具有所需的性质.

第二例　对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l$，令$x'=(0,\xi_2,\xi_3,\cdots)$，并定义$l$上的等价范数

$$\|x\|_M=\max\{|\xi_1|,\|x'\|_1\},$$

这里，$\|\cdot\|_1$ 代表 l 上的通常范数．对 $x\in l$，令 $Ix=x$，则 I 是由 l 到 l^2 内的连续线性算子．在 l 上定义范数

$$\|x\|_H=(\|x\|_M^2+\|Ix\|_\omega^2)^{\frac{1}{2}},$$

这里，$\|\cdot\|_\omega$是例 11 中给出的 l^2 上的范数．易见，$\|\cdot\|_H$是 l 上的等价范数且是严格凸的．

兹证 $\|\cdot\|_H$ 不是中点局部一致凸的．为此，令 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$x=\alpha e_1$，$x_n=\alpha(e_1+e_n)$，$y_n=\alpha(e_1-e_n)$，则$\|x\|_H=1$，$\|x_n\|_H\to1$，$\|y_n\|_H\to1$，$\|2x-(x_n+y_n)\|_H\to0$，而 $\|x_n-y_n\|_H\to\alpha\sqrt{8}$．因此，$\|\cdot\|_H$不是中点局部一致凸的．

14．中点局部一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间．

Anderson[26]提出下述问题：如果Banach空间X是中点局部一致凸的，那么它是否必有性质H？Smith[296]指出，这个问题的答案是否定的．由于 Banach 空间的局部一致凸性蕴涵具有性质H，因此，这也说明了中点局部一致凸的Banach空间不必是局部一致凸的．Smith 的例子如下：

对每一正整数 k，定义由空间 c_0到 $\mathbb{R}^1$内的映射 V_k：

$$V_k(x)=V_k(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\sup\{|\xi_1-\xi_i|:i\geqslant k\}.$$

设$\{\alpha_n\}_{n=2}^\infty$ 是正数列，使$\sum\limits_{n=2}^\infty\alpha_n^2=1$，然后分别定义由 c_0到 l^2 内的映射V 与T 如下：

$$V(x)=(\alpha_2V_2(x),\alpha_3V_3(x),\cdots),$$
$$T(x)=(\xi_1,\alpha_2\xi_2,\alpha_3\xi_3,\cdots).$$

由于$\{V_k(x)\}$与$\{\xi_k\}$均是有界数列，且$\sum\limits_{n=2}^\infty\alpha_n^2=1$，故 $V(x)$，$T(x)$均属于l^2是十分显然的．对$x\in c_0$，令

$$\|x\|_G=(\|x\|_\infty^2+\|V(x)\|_2^2+\|T(x)\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

这里，$\|\cdot\|_\infty$与$\|\cdot\|_2$分别代表 c_0与 l^2 上的通常范数．因为T连续、线性、单射（即 $T(x)=T(y)$蕴涵 $x=y$），且对所有的 $x,y\in c_0$，在 l^2 中有

$$V(x+y)\leqslant V(x)+V(y),$$

所以$\|\cdot\|_G$是 c_0上的一个范数．此外，由于$\|\cdot\|_\infty\leqslant\|\cdot\|_G\leqslant\sqrt{6}\|\cdot\|_\infty$，因而$\|\cdot\|_G$等价于 c_0上的通常范数．

可以证明，空间$(c_0,\|\cdot\|_G)$是中点局部一致凸的（参看[296]）．

现指出，空间$(c_0,\|\cdot\|_G)$不具有性质H．为此，令 $x=e_1$，$x_n=e_1+e_n$．于是

$$\|x_n\|_G\to\|x\|_G=\sqrt{3},\ x_n\xrightarrow{\text{弱}}x\ (n\to\infty),$$

但$\{x_n\}$并不收敛于 x，即$(c_0,\|\cdot\|_G)$没有性质 H．

15．严格凸而非各向一致凸的 Banach 空间．

设$\{\alpha_n\}$是递减且趋于 0 的正数列，定义由空间 l^2 到 l^2 内的连续线性算子 T 如下：

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\alpha_2\xi_2,\alpha_3\xi_3,\cdots).$$

对 $x\in l^2$，令

$$\|x\|_N=(\|x\|_L^2+\|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

这里，$\|\cdot\|_L$ 是例 12 中的 l^2 上的范数．于是，$\|\cdot\|_N$是 l^2 上的等价范数，且显然是严格凸的．然而它并不各向一致凸，因为若令 $x_n=e_1+\sqrt{3}e_n$，$y_n=\sqrt{3}e_n$，则$\|x_n\|_N\to1$，$\|y_n\|_N\to1$，$\|x_n+y_n\|_N\to2$，而对每一 n，有 $x_n-y_n=e_1$．

16．各向一致凸而非局部一致凸的 Banach 空间．

对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令 $x'=(0,\xi_2,\xi_3,\cdots)$，并定义 l^2 上的范数

$$\|x\|_F=|\xi_1|+\|x'\|_2.$$

因为$\|\cdot\|_2\leqslant\|\cdot\|_F\leqslant2\|\cdot\|_2$，所以$\|\cdot\|_F$是 l^2 上的等价范数．设$\{\alpha_n\}$是递减且趋于零的正数列，定义由空间 l^2 到 l^2 内的连续线性算子 T

如下：

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(a_2\xi_2,a_3\xi_3,\cdots).$$

对 $x\in l^2$，令

$$\|x\|_A=(\|x\|_F^2+\|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

则$\|\cdot\|_A$是 l^2 上的一个等价范数. 为证$\|\cdot\|_A$是各向一致凸的，我们要应用下述 Zizler[337]定理.

定义 设 X 是Banach 空间，对每一非零元 $z\in X$ 及 $0<\varepsilon\leqslant 2$，令

$$\delta(\varepsilon,z)=\inf\left\{1-\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|: x-y\in S,\right.$$

$$\left. x-y=\alpha z \text{且} \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\},$$

这里 S 代表 X 中的单位球面. 设 A 是 X 的非空子集，若对每一非零元 $z\in A$，均有 $\delta(\varepsilon,z)>0$，则称 X 为 UR_A.

Zizler 定理 设$(X,\ \|\cdot\|_X)$与$(Y,\ \|\cdot\|_Y)$皆为Banach 空间，T 是由 X 到 Y 内的连续线性算子，对 $x\in X$，令

$$|||x|||=(\|x\|_X^2+\|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}},$$

则$|||\cdot|||$是 X 上的一个等价范数. 此外，若 Y 是 $UR_{T(X)}$ 而 X 是 $UR_{k(T)}$，这里 $k(T)=\{x\in X: Tx=0\}$，则$|||\cdot|||$是各向一致凸的.

根据 Zizler 定理，我们显然只要证明$\|\cdot\|_F$是 $UR_{k(T)}$即可，这里 $k(T)=\{x\in l^2: Tx=0\}=\text{span}\{e_1\}$. 为此，令 $x=\{\xi_i\}$，$y=\{\eta_i\}\in l^2$，使$\|x\|_F=\|y\|_F=1$，$x-y=\varepsilon e_1$，则当 $i\geqslant 2$ 时，有 $\xi_i=\eta_i$. 因此 $\xi_1=-\eta_1$，可见

$$\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_F=\left(\sum_{i=2}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_F-|\xi_1|=1-\frac{\varepsilon}{2},$$

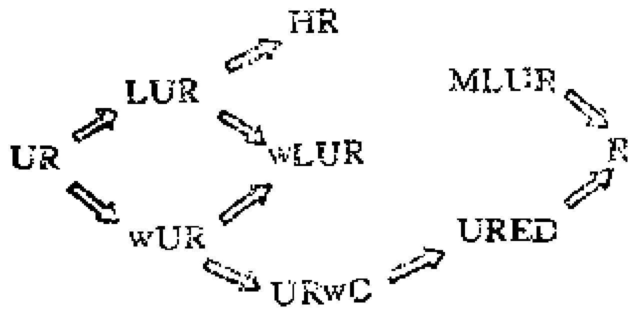
从而 $\delta(\varepsilon,\ z)>0$，$z\in\text{span}\{e_1\}$. 因此，$\|\cdot\|_A$是各向一致凸的. 然而$\|\cdot\|_A$不是弱局部一致凸的，从而也不是局部一致凸的，这是因为若令 $x=e_1$，$x_n=e_n$，则$\|x\|_A=1$，$\|x_n\|_A\to 1$，$\|x+x_n\|_A\to 2$，

而$\{x_n\}$却弱收敛于零.

例 11 至例 16 均属于 Smith[294],[295],[296].

17. 各种凸性之间的相互关系的补充例子.

前面，我们已经讨论了一致凸，局部一致凸，弱局部一致凸，严格凸，中点局部一致凸，各向一致凸之间的蕴涵关系. 这里我们再进一步指出，上述各种凸性连同弱一致凸、弱紧集方向一致凸之间的蕴涵关系如下图所示：



下面的一系列例子将要表明，凡是上图中未曾列出的蕴涵，可能都不行. 至于上图所示蕴涵关系的证明，可参看[16],[295].

(a) $(l^2, \|\cdot\|_L)$ 这个空间是 LUR，从而也是 wLUR，R，MLUR，HR. 但它不是 URED，从而也不是 URwC，wUR，UR (参看例 12).

(b) $(l^2, \|\cdot\|_w)$ 空间$(l^2, \|\cdot\|_w)$的定义可参看例 11. 它是 wUR，从而也是 wLUR，R，URwC，URED. 又，$\|\cdot\|_w$ 不是 MLUR. 也容易证明，它不是 HR，从而也不是 LUR，UR.

(c) $(l^2, \|\cdot\|_A)$ 这个空间的定义可参看例 16. $\|\cdot\|_A$ 是 URED，从而也是 R. 但不是 wLUR，从而也不是 wUR，LUR，UR. 又，它也不是 URwC，这是因为若令 $x_n=e_1, y_n=e_n(n\geq 2)$，则$\|x_n\|_A=1$，$\|y_n\|_A\to 1$，且$\|x_n+y_n\|_A\to 2$. 但 $x_n-y_n\xrightarrow{弱}e_1$. 因此，$\|\cdot\|_A$ 不是 URwC.

还可证明，$\|\cdot\|_A$ 是 HR 和 MLUR. 这里，我们就$\|\cdot\|_A$ 是 HR 来加以证明之. 据引言中的定理 2，我们只要证明$\|\cdot\|_F$ 是H即可.

为此，取 x，$x_n \in l^2$，$n=1$，2，$\cdots$，使$\|x_n\|_F \to \|x\|_F$且$\{x_n\}$弱收敛于 x. 不妨假设$\|x_n\|_F=\|x\|_F=1$. 于是对任何 n，有

$$|\xi_1^{(n)}|+\|x_n'\|_2=|\xi_1|+\|x'\|_2.$$

因为 $x_n \xrightarrow{弱} x$，所以 $\xi_1^{(n)} \to \xi_1$. 因此$\|x_n'\|_2 \to \|x'\|_2$，且 $x_n' \xrightarrow{弱} x'$. 由于$\|\cdot\|_2$是 H，故 $x_n' \to x'$. 因此，$x_n \to x$.

(d) $(l^2, \|\cdot\|_N)$ 据例 15，$\|\cdot\|_N$ 不是 URED，从而它也不是 URwC，wUR，UR. 因为$\|\cdot\|_L$ 是 LUR，故据空间$(l^2, \|\cdot\|_N)$的定义及引言中的定理 2，$\|\cdot\|_N$ 也是 LUR，从而它也是 HR，MLUR，R，wLUR.

(e) $(l, \|\cdot\|_H)$ $\|\cdot\|_H$ 不是 MLUR(参看例 13)，从而也就不是 LUR．UR．还可证明，它也不是 wLUR，从而也不是 wUR.

其次，由[293]定理 2.5 可知，$\|\cdot\|_H$ 是 URwC，从而也是 URED 和 R. 又，因为$\|\cdot\|_H$ 是 l 上的等价范数，故它是H，从而是 HR.

(f) $(l, \|\cdot\|_E)$ 对 $x \in l$，令 $Ix=x$，则 I 是由 l 到 l^2 内的连续线性算子. 令

$$\|x\|_E=(\|x\|_1^2+\|Ix\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

则$\|\cdot\|_E$ 是 l 上的等价范数. 据[293]定理 2.5，$\|\cdot\|_E$ 是 URwC，从而也是 URED，R.

兹证$\|\cdot\|_E$ 是 LUR. 为此，令 x，$x_n \in l$，$n=1$，2，$\cdots$，使$\|x\|_E=1$，$\|x_n\|_E \to 1$，且$\|x+x_n\|_E \to 2$. 由此得到

$$2(\|x\|_E^2+\|x_n\|_E^2)-\|x+x_n\|_E^2 \to 0,$$

因而有

$$2(\|x\|_1^2+\|x_n\|_1^2)-\|x+x_n\|_1^2 \to 0, \tag{1}$$

$$2(\|Ix\|_2^2+\|Ix_n\|_2^2)-\|Ix+Ix_n\|_2^2 \to 0. \tag{2}$$

由(1)式可知，$\|x_n\|_1 \to \|x\|_1$，由(2)式，对每一正整数 i，有 $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$. 因而得到

$$\|x_n-x\|_1 \to 0,\quad \|Ix_n-Ix\|_2 \to 0,$$

故 $x_n \to x$，即$\|\cdot\|_E$是 LUR.

由于$\|\cdot\|_E$是 LUR，因而它也是 wLUR，HR，MLUR.

(g) $(c_0, \|\cdot\|_G)$ 这个空间是 MLUR，从而是 R；但不是 HR，从而也不是 LUR，UR(参看例 14). 还可证明，它是 wUR，从而也是 wLUR，URwC，URED.

我们把上述例子的结果列成下面的表格，表中标有"+"的，意味着所示的空间具有相应的凸性，标有"-"的，意味着所示的空间不具有相应的凸性.

	UR	LUR	HR	MLUR	wLUR	wUR	URwC	URED	R
$(l^2, \|\cdot\|_2)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(l^2, \|\cdot\|_L)$	−	+	+	+	+	−	−	+	+
$(l^2, \|\cdot\|_w)$	−	−	−	−	+	+	+	−	+
$(l^2, \|\cdot\|_A)$	−	−	−	+	−	−	−	[illegible]	+
$(l^2, \|\cdot\|_N)$	−	+	+	+	+	−	−	[illegible]	[illegible]
$(l, \|\cdot\|_H)$	−	−	+	−	−	−	+	+	−
$(l, \|\cdot\|_E)$	−	+	+	+	+	−	[illegible]	−	+
$(l, \|\cdot\|_1)$	−	−	[illegible]	−	[illegible]	−	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$(c_0, \|\cdot\|_G)$	−	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

注 Zizler[332] 曾证明，各向一致凸的 Banach 空间具有正规结构. Smith[294]构造了一个局部一致凸而不是各向一致凸的 Banach 空间，它具有正规结构. 这就说明了 Zizler 定理之逆并不成立.

18. 存在某个 Banach 空间，其范数不 Gateaux 可微.

Banach 空间 l^∞的范数不是G可微的. 为证明这一陈述，我们只要取 $x_0=(1, 1, 0, \cdots)\in l^\infty$，则$\|x_0\|=1$，且对于 $y=(1, 0, 0, \cdots)\in l^\infty$，有

$$\frac{\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|}{\lambda}=\begin{cases}1, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases}$$

因此，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{(\|x_0+\lambda y\|-\|x_0\|)}{\lambda}$不存在，故 l^∞的范数在 x_0 处不是 G 可微的.

注 其实，还可进一步证明 l^∞不线性同胚于范数 G 可微的 Banach 空间.

19. 存在某个 Banach 空间，其范数在某点 Gateaux 可微而不 Fréchet 可微.

我们指出，在 Banach 空间 l 中，范数$\|\cdot\|$在 x_0 处 G 可微当且仅当 x_0 的各个坐标都不等于 0；此外，$\|\cdot\|$在任何点 $x_0\in l$ 均不 F 可微.

事实上，(i) 若对某个 $\xi_n=0$，其中 $x=\{\xi_n\}$，则

$$\frac{\|x+te_n\|-\|x\|}{t}=\frac{|t|}{t},$$

当 $t\to 0$ 时上式的极限不存在，因此，$\|\cdot\|$在 x 处不是 G 可微的.

(ii) 若 $x=\{\xi_n\}$，ξ_n 均不为 0，任取 $y=\{\eta_n\}\in l$ 及 $\varepsilon>0$，选 n_0 充分大，使 $\sum\limits_{n>n_0}|\eta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 再选 $\delta>0$，使当 $1\leqslant n\leqslant n_0$，$|t|<\delta$ 时有 $\operatorname{sgn}(\xi_n+t\eta_n)=\operatorname{sgn}\xi_n$. 令 $x^*=\{\operatorname{sgn}\xi_n\}$，则当$|t|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}-x^*(y)\right|$$

$$=\left|\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}-\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sgn}\xi_n\cdot\eta_n\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{n_0}\frac{|\xi_n+t\eta_n|-|\xi_n|-t\eta_n\operatorname{sgn}\xi_n}{t}\right|+2\sum_{n>n_0}|\eta_n|$$

$$=2\sum_{n>n_0}|\eta_n|<\varepsilon.$$

因此，范数$\|\cdot\|$在 $x=\{\xi_n\}$ G 可微，且 G 导数就是$\{\operatorname{sgn}\xi_n\}$.

(iii) 只须考虑 $x=\{\xi_n\}$，$\xi_n\neq0$，$n=1, 2, \cdots$，令

$$y_m=(0, \cdots, 0, -2\xi_m, -2\xi_{m+1}, \cdots),$$

则当 $m\to\infty$ 时 $\|y_m\|\to0$. 我们注意，$x^*=\{\mathrm{sgn}\xi_n\}$ 是仅有可能的 F 导数，但是

$$\lim_{y_m\to0}\frac{|\|x+y_m\|-\|x\|-x^*(y_m)|}{\|y_m\|}$$

$$=\lim_{y_m\to0}\frac{\left|\sum\limits_{n\geq m}-2|\xi_n|\right|}{\|y_m\|}=\lim_{y_m\to0}\frac{\|y_m\|}{\|y_m\|}=1,$$

故范数 $\|\cdot\|$ 在 $x=\{\xi_n\}$ 不是 F 可微的.

注 Restrepo[258] 指出，设 $(X^*, \|\cdot\|^*)$ 是实 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的共轭空间，若范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|^*$ 均 F 可微，则 $(X, \|\cdot\|)$ 必为自反空间.

Whitfield[320] 指出，在这个命题中 F 可微不能代以 G 可微.

20. 可分而不光滑的 Banach 空间.

由例 19 可知，可分 Banach 空间 l 在 $x_0=(1, 0, 0, \cdots)$ 点并不 G 可微. 由于 Banach 空间的范数的 G 可微性与光滑性是等价的(参看引言中的定理 3)，因而 l 并不光滑.

l 的不光滑性也可直接证明如下：取 $x_0=(1, 0, 0, \cdots)\in l$，$f=(1, 0, 0, \cdots)\in l^\infty$，$g=(1, 1, \cdots)\in l^\infty$，则 $\|f\|=\|g\|=1$，$f\neq g$，且 $f(x_0)=g(x_0)=1$. 因此，使 $f(x_0)=1$ 的泛函 f 并不唯一，故 l 不光滑.

21. 不能赋予等价的光滑范数的 Banach 空间.

Banach 空间 l^∞ 上不能赋予等价的 G 可微范数(参看例18)，而 Banach 空间的范数的 G 可微性与光滑性是等价的，故在 l^∞ 上不能赋予等价的光滑范数.

22. 存在某个不可分的 Banach 空间，而能赋予等价的光滑范数.

Banach 空间 $c_0(\Gamma)$ 具有所需的性质.

现已证明 $c_0(\Gamma)$ 可再赋范使它在新范数下是局部一致凸的，且 F 可微，及在新范数下相应的共轭空间也是局部一致凸的.

注 Klee[176] 证明了每个可分的 Banach 空间皆可赋予一个等价的光滑的严格凸范数，且相应的共轭空间也是严格凸的. 例 21 说明了在这个命题中空间可分的条件不能去掉. 例 22 说明了也存在不可分的 Banach 空间，在其上能赋予等价的光滑的，甚至是局部一致凸的 F 可微的范数.

23. 存在某个可分的 Banach 空间，其共轭空间不线性同胚于任何一个光滑空间.

可分 Banach 空间 l 的共轭空间 l^∞ 不线性同胚于任何一个光滑空间(参看例 21).

注 若 X 是可分的 Banach 空间，则 X 可再赋予等价范数，使 X 在新范数下是严格凸的光滑空间，且相应的共轭空间 X^* 也是严格凸的. 上述反例说明了这个命题的结论不能加强成为 X^* 是光滑的.

可以证明，若 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 是严格凸的，则 X 必是光滑的. 应当注意，这个命题之逆并不成立. Trojanski[314] 构造了一个光滑的 Banach 空间 X，使 X^* 不是严格凸的.

24. 存在一个 Banach 空间 X，使 X^* 是严格凸的，但 X 并不非常光滑.

Banach 空间 X 称为非常圆形的，当且仅当 $S(X^*)$ 中不存在 x^* 同时是 $S(X)$ 中的某个 x 和 $S(X^{**})$ 中的某个 x^{**} 的可达范数元，其中 $x^{**}\neq J(x)$，J 表示从 X 到 X^{**} 的典则映射.

非常圆形的概念是 Sullivan[304] 给出的. 他还证明了：(i)若 X^* 是非常圆形的，则 X 是非常光滑的. (ii)若 X^* 是光滑的，则 X 是非常圆形的.

由于非常圆形空间必为严格凸空间，因而自然产生问题：若 X^* 是严格凸的，则 X 是否必为非常光滑的？这个问题的答案是否

定的．Thakare[309]有例如下：

在序列空间 l^∞ 上取新范数：对 $x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，令

$$\|x\|=\sup_n|\xi_n|+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\xi_n|^2}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

这个新范数 $\|\cdot\|$ 与 l^∞ 上的原来的上确界范数是等价的．在 l 上定义范数为

$$\|y\|=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n:\|x\|\leqslant 1\right\},$$

其中 $x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}$，$\|\cdot\|$ 与 l 上的通常范数是等价的，而且 $(l^\infty,\|\cdot\|)$ 是 $(l,\|\cdot\|)$ 的共轭空间．可以证明，$(l^\infty,\|\cdot\|)$ 是严格凸的，$(l,\|\cdot\|)$ 是光滑的，但不是非常光滑的．证明细节可参看作者原文．

注　Tacon[305]证明了，若 X 是非常光滑的 Banach 空间，则 X^* 有等价的严格凸范数．这个结果预示存在一个 Banach 空间 X，X 是非常光滑的，但 X^* 不是严格凸的．然而，我们还不能给出这样的例子．

25．存在一个弱 Asplund 空间，它不是 Asplund 空间．

Asplund 空间必是弱 Asplund 空间，其逆不真．Phelps 指出，Banach 空间 l 不是 Asplund 空间，但它是弱 Asplund 空间．为证明这一陈述，我们先给出

定理 1　可分 Banach 空间是弱 Asplund 空间．

1975 年，Namioka 和 Phelps[228]证明了，若 X 是 Asplund 空间，则 X^* 有 RNP．

1978 年，Stegall[301]指出这个定理之逆也成立．于是有

定理 2　Banach 空间 X 是 Asplund 空间，当且仅当 X^* 有 RNP．

因 l 是可分的 Banach 空间，故据定理 1，l 是弱 Asplund 空间．然而 $l^*=l^\infty$，而 l^∞ 不具有 RNP，故据定理 2，l 不是 Asplund 空间．

注 Thakare[309]给出了一些未解决的问题.

设A是X的有界集，如果它是一族闭球之交，则称A是容许的. 设A是无界集，如果对每个有界的容许集Y，$A\cap Y$是容许的，则称A是容许的. 显然，容许集是X的闭凸子集；在任意一个Banach空间中，这个命题之逆不真. 如果Banach空间X的每个闭凸子集都是容许的，则称X有性质(Ⅰ).

问题 1 如果X是Asplund空间，那么X是否必有等价的范数满足性质(Ⅰ)?

Diestel和Uhl,Jr[84]提出了25个未解决的问题，下面是其中之一(问题18)：如果X是Asplund空间，那么X是否有等价的F可微范数?

如果X有等价的F可微范数，那么X必有性质(Ⅰ). 因此，如果问题1的答案是否定的，那么Diestel和Uhl,Jr的问题18的答案也是否定的.

Ekeland和Lebourg[87]证明了，若Banach空间X有等价的F可微范数，则X是Asplund空间. 于是有

问题 2 如果X有等价的范数满足性质(Ⅰ)，那么X是Asplund空间吗?

问题 3 非常光滑性必有性质(Ⅰ)吗?

Franchetti[108]引入并研究了下述性质：设X是Banach空间，如果单位球$B=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$是可容许的半空间之交，则称$X$满足性质(a).

Pethe和Thakare[245]证明了，若Banach空间满足性质(Ⅰ)，则它满足性质(a). 他们还指出，每个Asplund空间满足性质(a). 因此，提出

问题 4 范数的光滑性(非常光滑性)与具有性质(a)的范数之间有什么关系?

Giles,Gregory和Sims[114]曾证明，若X是Banach空间，X^*

有性质(Ⅰ),则X是自反的. 然而,研究下面的问题仍然是有意义的.

问题 5 对自反 Banach 空间X作些什么限制可使X有性质(Ⅰ)?

我们知道,自反性是个线性同胚性质,而性质(Ⅰ)是一个等距同构的性质. 按同样的想法,可给出下面的问题.

问题 6 设X有性质(Ⅰ),X的每个可分子空间是否有性质(Ⅰ)?

如果我们回顾一下 Asplund 空间的定义,自然会引入下述概念:设X是 Banach 空间,如果X的每个等价范数在X的一个G_δ稠密子集上是非常光滑的,则称X是一个VS空间.

对于这些空间,下面这些问题是值得研究的.

问题 7 VS空间是否有等价范数满足性质(Ⅰ)(或性质(a)). 反之如何?

问题 8 给出VS空间的特征.

问题 9 讨论VS空间的对偶性.

26. 无处 Gateaux 可微的连续的凸函数.

对$x=\{\xi_n\}\in l^\infty$,令$p(x)=\limsup\limits_n|\xi_n|$. 显然,$p(x)$是$l^\infty$上的凸函数,且$p(x)\leqslant\|x\|$,故$p(x)$是连续的. 兹证对任意$x=\{\xi_n\}\in l^\infty$,$p(x)$在$x$处均不$G$可微.

(i)若$p(x)=0$,则$\xi_n\to 0$,取$y=(1,\cdots,1,0,\cdots)\in l^\infty$,则

$$\frac{p(x+ty)-p(x)}{t}=\frac{\limsup\limits_n|\xi_n+t|-\limsup\limits_n|\xi_n|}{t}$$

$$=\frac{|t|}{t},$$

可见$p(x)$在x处并不G可微.

(ii)若$p(x)>0$,因$p(x)$是正齐性的,故不妨设$p(x)=1$,即$\limsup\limits_n|\xi_n|=1$,于是存在子列$\{\xi_{n_k}\}$使$|\xi_{n_k}|\to 1$,不妨再假定各个

ξ_{n_k} 均同号. 又由于 $p(-x)=p(x)$, 故不妨设 $\xi_{n_k}>0$. 取 $y=\{\eta_n\}\in l^\infty$,其中

$$\eta_n=\begin{cases}0, n\neq n_k \text{ 或 } n=n_k, k \text{ 为奇数},\\ 1, n=n_k, k \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

则

$$\frac{p(x+ty)-p(x)}{t}=\frac{\limsup\limits_n|\xi_n+t\eta_n|-\limsup\limits_n|\xi_n|}{t}$$

$$=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

因此,$p(x)$在 x 处不是 G 可微的.

注 这个例子也说明了 Banach 空间 l^∞ 不是弱 Asplund 空间.

27. 存在某个线性同胚于严格凸空间的 Banach 空间,它的某个商空间不线性同胚于任何严格凸空间.

Klee[176]指出,若M是严格凸 Banach 空间X的自反子空间,则商空间X/M也是严格凸的. 若M是严格凸空间X的闭子空间,则商空间X/M不必是严格凸的. 又,l^∞上可再赋范而使之成为严格凸的 Banach 空间(参看例 8 的注). Diestel 和 Schäffer 各自独立地提出下述问题:在商空间 l^∞/c_0 上能否赋予等价的严格凸范数? Bourgain[55]否定地回答了这个问题. 证明细节可参看作者原文.

注 Klee[176]指出,存在可分而且光滑的 Banach 空间X及闭子空间M,使商空间X/M不是光滑的 Banach 空间.

28. 一个线性同胚于各向一致凸空间的 Banach 空间,它的某个商空间不线性同胚于任何各向一致凸空间.

设 X 为 Banach 空间,则对某个集合 I, X 线性同胚于 $l(I)$ 的某个商空间(参看[327],p.81). 于是,对不可数集 Γ,存在 I 使 Banach 空间 $l^\infty(\Gamma)$线性同胚于 $l(I)$的某个商空间. 由于 $l^\infty(\Gamma)$

不线性同胚于任何严格凸空间(参看例 8)，故它也不线性同胚于任何各向一致凸空间.从而 $l(I)$ 的某个商空间也不线性同胚于任何各向一致凸空间.

兹证在 $l(I)$ 上可赋予等价的各向一致凸范数. 事实上，对 $x\in l(I)$，令 $Tx=x$，则 T 是由 $l(I)$ 到 $l^2(I)$ 内的连续线性算子. 令

$$|||x|||=(\|x\|_1^2+\|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

则因 $l^2(I)$ 是各向一致凸的，故 $(l(I),\ |||\cdot|||)$ 也是各向一致凸的.

注 下述问题尚未解决：

问题 1 设 X 是各向一致凸的 Banach 空间，M 是 X 的自反子空间，则商空间 X/M 是否必为各向一致凸的?

问题 2 设 X 是自反的 Banach 空间，则在 X 上可否赋予等价的各向一致凸范数?

29．一个线性同胚于弱紧集方向一致凸空间的 Banach 空间，它的某个商空间不线性同胚于任何弱紧集方向一致凸空间.

对于 Banach 空间 $l(I)$ 而言，在它上面的等价范数为各向一致凸的充要条件是，这个范数为弱紧集方向一致凸的(参看[293])，于是由例 28 可知，$l(I)$ 线性同胚于某个弱紧集方向一致凸空间. 另一方面，$l(I)$ 的某个商空间不线性同胚于任何各向一致凸空间(参看例 28)，因而它也不线性同胚于任何弱紧集方向一致凸空间。

30．一个非严格凸的 Banach 空间 X 及闭子空间 M，使商空间 X/M 是一致凸的.

若 M 是一致凸 Banach 空间 X 的闭子空间，则商空间 X/M 也是一致凸的(参看[293]). 这个命题之逆不真. 付倭义[3]作出了一个非严格凸的 Banach 空间 X 及其闭子空间 M，使商空间

X/M 是一致凸的. 他的例子如下:

设 $X=\mathbf{R}^3$, $M=\{m=(m_1,m_2,\ 0):m_1,\ m_2\in\mathbf{R}^1\}$. 对 $x=(x_1,x_2,x_3)\in X$, 令

$$\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\},$$

则

$$\|x+m\|=\begin{cases}|x_3|, & |x_1+m_1|,|x_2+m_2|\leqslant|x_3|,\\ \max\{|x_1+m_1|,|x_2+m_2|\}, & |x_1+m_1| \text{ 或 } |x_2+m_2|>|x_3|.\end{cases}$$

因此, $\|\tilde{x}\|=\inf\{\|x-m\|:m\in M\}=|x_3|$. X/M 的单位球面上仅有两个元素 $\tilde{x}_0=(0,0,1)+M$, $\tilde{y}_0=(0,0,-1)+M$. 显然, $\|\tilde{x}_0+\tilde{y}_0\|<2$, 所以 X/M 是严格凸的. 因为对于有限维赋范线性空间而言, 严格凸与一致凸是等价的, 所以 X/M 也是一致凸的. 但是 X 并不严格凸, 这是因为若取 $a=(0,0,-1)$, $b=(1,0,1)$, 则 $\|a\|=\|b\|=1$, 而 $\|a+b\|=2$.

注 付偻义[2]指出, 若 M 是 Banach 空间 X 的自反子空间, 则 X 为一致凸的充要条件是 X/M 是一致凸的. 上述反例说明了在这个命题中, M 为自反的条件不能减弱为 M 是 X 的闭子空间.

31. 一个一致凸 Banach 空间上的一族一致凸 Banach 空间之积, 它不是一致凸的.

设 S 是一个指标集, X 是由定义在 S 上的实值函数组成的 Banach 空间, 它满足条件: 若 $f\in X$ 且对每一 $s\in S$, 函数 g 适合 $|g(s)|\leqslant|f(s)|$, 则 $g\in X$ 且 $\|g\|\leqslant\|f\|$.

设对每一 $s\in S$, 都给定一个 Banach 空间 B_s. 令 $P_X B_s$ 表示定义在 S 上且满足下述条件的全体函数 x:

(i) 对每一 $s\in S$, $x(s)\in B_s$.

(ii) 若 f 是一个实值函数 $f(s)=\|x(s)\|(s\in S)$, 则 $f\in X$.

在 $P_X B_s$ 上, 我们定义 x 的范数如下:

$$\|x\| = \|f\|_X.$$

容易证明，$(P_X B_s, \|\cdot\|)$为 Banach 空间。

Day[78]证明了 $P_X B_s$为一致凸的充要条件是X为一致凸的，且 B_s 有共同的凸性模，即任给 $\varepsilon > 0$，存在$\delta(\varepsilon) > 0$，使对每一$s \in S$，当 $x_s, y_s \in B_s$，$\|x_s\|_{B_s} = \|y_s\|_{B_s} = 1$，且 $\|x_s - y_s\| \geq \varepsilon$ 时就有

$$\|x_s + y_s\| < 2(1 - \delta(\varepsilon)).$$

又，当X是有限维的严格凸空间，且每个 B_s 都是一致凸空间时，$P_X B_s$ 也是一致凸的(参看[78])。应当注意，当X及各个 B_s 都是一致凸时，$P_X B_s$(称 $P_X B_s$ 为一致凸空间X上的一族一致凸空间$\{B_s\}$之积，其它各种凸性之积可仿此定义）不必是一致凸的。例如，取$X = l^2$，又 B_i 是由点 $x_i = (x_{i1}, \cdots, x_{ii})$所组成的 i 维线性空间，并在 B_i 上定义范数为

$$\|x_i\|_{B_i} = \max_{1 \leq j \leq i} |x_{ij}|,$$

则X与各个 B_i 均为一致凸的 Banach 空间。然而，$P_X B_i$ 上不存在等价的一致凸范数(参看例 5)。

32．一个各向一致凸 Banach 空间上的一族各向一致凸 Banach 空间之积，它不是各向一致凸的.

Zizler[327]证明：若$X = l^2$，B_s 都是各向一致凸的，则$P_X B_s$ 也是各向一致凸的。Day 指出：若 $P_X B_s$ 是各向一致凸的，则 X 和各个 B_s 都是各向一致凸的。至于逆命题是否成立，Day 猜测不能成立。Smith[294]举出反例证实了 Day 的猜测是对的。Smith 的例子如下：

设$\{a_i\}_{i=2}^\infty$是正数列，使 $\sum_{i=2}^\infty a_i^2 = 1$．对 $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$，定义

$$|||x||| = \left[\|x\|_\infty^2 + \sum_{i=2}^\infty a_i^2 (|x_1| + |x_i|)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

这里$\|x\|_\infty=\sup\limits_n|x_n|$. 易见，$\|\cdot\|$是$l^\infty$上的一个范数，且

$$\|\cdot\|_\infty\leqslant\|\cdot\|\leqslant\sqrt{5}\|\cdot\|_\infty.$$

可以证明，$(l^\infty,\|\cdot\|)$是各向一致凸的.

令$X=(l^\infty,\|\cdot\|)$，对每一正整数i，设B_i是二维空间l^{i+1}. 注意，各个B_i都是各向一致凸的. 设$z\in P_XB_i$定义如下：对每一i，$z(i)=(1,0)\in B_i$. 又对每一$n\geqslant 2$，x_n，$y_n\in P_XB_i$如下：

$$x_n(i)=\begin{cases}(0,0), & i=1,\\ \left(\frac{1}{2},b_n\right), & i=n,\\ (1,0), & i\neq 1,n;\end{cases}$$

$$y_n(i)=\begin{cases}(-1,0), & i=1,\\ \left(-\frac{1}{2},b_n\right), & i=n,\\ (0,0), & i\neq 1,n.\end{cases}$$

这里，b_n这样选取，使$b_n>0$且$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+(b_n)^{n+1}=1$，则$\|x_n\|=\sqrt{2}$，$\|y_n\|=(2+3a_n^2)^{\frac{1}{2}}$，而

$$\|x_n+y_n\|=[4b_n^2+4+(4b_n^2+4b_n-3)a_n^2]^{\frac{1}{2}}.$$

又对每一$n\geqslant 2$，$x_n-y_n=z$. 因为$b_n\to 1$，$a_n\to 0$，可见$\|y_n\|\to\sqrt{2}$，$\|x_n+y_n\|\to 2\sqrt{2}$. 因此，P_XB_i不是各向一致凸的.

注 Day指出：若X，B_s都是弱一致凸的，则P_XB_s也是弱一致凸的. 付俊义[2]证明了：若$X=l^p(p>1)$，B_s是弱局部一致凸的，则P_XB_s也是弱局部一致凸的. Lovagloa[211]证明了：若X，B_s都是局部一致凸的，则P_XB_s也是局部一致凸的. Anderson[26]证明了：若$X=l^p(p>1)$，又各个B_s都是中点局部一致凸的(或具有性质H)，则P_XB_s也是中点局部一致凸的(或具有性质

H). Day[79]证明了：若 X, B_s 都是严格凸的，则 $P_X B_s$ 也是严格凸的. Smith[293]证明了，若 X 自反，则 $P_X B_s$ 为弱紧集方向一致凸的充要条件是 X，B_s 都为弱紧集方向一致凸的.

下述问题是没有解决的：

若 X, B_s 都是弱局部一致凸的，问乘积 $P_X B_s$ 是否必为弱局部一致凸的？关于中点局部一致凸、性质H以及弱紧集方向一致凸，也存在相应的问题.

33. 不能赋予等价的各向一致凸范数的 Banach 空间.

Day, James 和 Swaminathan[80]证明了每个可分 Banach 空间都可赋予等价的各向一致凸范数. 然而，对于不可分的Banach空间而言，这一命题并不成立. Day, James和Swaminathan有例如下：

设 Γ 为一不可数集，令 $X=c_0(\Gamma)$，则 X 上不存在等价的各向一致凸的范数. 事实上，如果 $\|\!|\cdot|\!\|$ 是 X 上的等价范数，令

$$\mu=\sup\{|\!\|x|\!\|:\|x\|\leqslant 1, x\in X\},$$

并设 $\{u_n\}$ 是 X 中的一个点列，使 $\|u_n\|=1$，$|\!\|u_n|\!\|\to\mu$，则因 Γ 不可数，故存在非零元 $z\in X$（不妨设 $|\!\|z|\!\|\leqslant\mu$），使对一切 n 及任何 $t\in\Gamma$，都有 $z(t)u_n(t)=0$，即对每一 n 及 $t\in\Gamma$，或者 $z(t)=0$，或者 $u_n(t)=0$. 对 $0<\varepsilon<1$ 及任意 $\delta>0$，选取 u_n 使 $|\!\|u_n|\!\|>\mu(1-\delta)$. 于是，令 $x=u_n+\dfrac{z}{2}$，$y=u_n-\dfrac{z}{2}$，则 $|\!\|x|\!\|\leqslant\mu$，$|\!\|y|\!\|\leqslant\mu$. 又，$\left|\!\left\|\dfrac{(x+y)}{2}\right|\!\right\|>\mu(1-\delta)$，但 $x-y=z$. 由此可知，$|\!\|\cdot|\!\|$ 不是各向一致凸的.

注　是否每个自反 Banach 空间都可赋予等价的各向一致凸范数？这是尚未解决的一个问题.

第八章 Banach空间的同构理论

引言

Banach 空间的同构是泛函分析理论的一个重要内容，虽然在本书的前面几章中已涉及其中的某些内容．这里，我们仍将涉及本章例子的某些有关概念和命题列出，还有一些有关概念和命题在相应的例子中陆续被给出．

设X，Y是两个 Banach 空间，如果存在一个从X到Y上的一对一的算子T，使T及T^{-1}都是连续的，则称X与Y拓扑同胚，简称同胚．假如T还是一个线性算子，则称 Banach 空间X与Y拓扑同构或线性同胚．如果对每个$x\in X$，还有$\|Tx\|=\|x\|$，则称X与Y等距同构，或简称等距．

任何两个维数相同的有限维 Banach 空间彼此都是线性同胚的．任何一个可分的 Banach 空间都与$C[0,1]$的一个子空间等距同构．任何可分的 Hilbert 空间都与l^2线性同胚．

定理 1 设X是赋范线性空间，M是X的子空间，则M^*等距同构于$X^*/M^{\perp}$，其中$M^{\perp}=\{f\in X^*: f(x)=0, 当\ x\in M时\}$．

定理 2 设X是 Banach 空间，M为X的闭子空间，则$(X/M)^*$等距同构于$M^{\perp}$．

定理 3 设X是可分的 Banach 空间，则X线性同胚于l的一个商空间．

设Y为 Banach 空间X的闭子空间，若存在一个从X到Y上的有界线性算子，则称Y在X中是可补的．由定义易知，X的闭子空间Y在X中可补的充要条件是存在闭子空间$Z\subset X$，使$Y\cap Z=\{0\}$，$X=Y+Z$，即$X=Y\oplus Z$．

当X为 Hilbert 空间时，X的任一闭子空间M皆在X中可补．

定理 4 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$的每个无穷维子空间$E$均含有一个子空间$F$,使$F$线性同胚于$l^p$,并在$l^p$中可补.

定理 5 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$的每个无穷维可补子空间皆与$l^p$线性同胚.

定理 4 及定理 5 对 Banach 空间 c_0也成立.

有关 Banach 空间的同构理论的更多的材料以及上述定理的证明,可参看[15].

1. 万有空间.

度量空间X称为万有的,是指每一可分度量空间都和X的某个子空间等距.

万有空间的存在性是由 Урысон 于 1923 年证明的. 之后, Banach 和 Mazur 指出$C[0,1]$是万有空间. 证明细节可参看[11],pp. 224—226).

注 Bosznay[54]指出,若$(X,\|\cdot\|)$是万有空间,X_1,X_2是X的闭子空间,使$X=X_1\oplus X_2$,则X_1,X_2不必是万有空间.

2. 存在无穷维赋范线性空间,它等距同构于它的某个真子空间.

设X为 Banach 空间c或$l^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$,对$\{\xi_n\}\in X$,令

$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$, 则$X$等距同构于其内的一个真子空间,后者乃由第一个坐标恒为 0 的所有对应数列组成.

注 对有限维赋范线性空间而言,上面的情况是不会发生的.即,有限维赋范线性空间是绝不能与其真子空间等距同构的.

3. 线性同胚而不等距同构的赋范线性空间.

设$x=\{\xi_n\}\in c$,令$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$, $\eta_1=\xi$, $\eta_2=\xi_2-\xi$, $\cdots$, $\eta_n=\xi_n-\xi(n\geqslant2)$,$\cdots$,则$y=\{\eta_n\}\in c_0$. 令

$$y=Tx,$$

则T是由空间c到c_0的线性算子. 兹证$R(T)=c_0$. 为此,任取$y=\{\eta_n\}\in c_0$,并令$\xi_1=\eta_1,\xi_n=\eta_n+\eta_1(n\geqslant2)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\lim_{n\to\infty}(\eta_n+\eta_1)=\eta_1,$$

故 $x=\{\xi_n\}\in c$，且

$$Tx=(\eta_1,\xi_2-\eta_1,\cdots,\xi_n-\eta_1,\cdots)=y,$$

即 $R(T)=c_0$。又，线性算子 T 是一对一的，故逆算子 T^{-1} 存在。不难证明，T 和 T^{-1} 都是连续的．事实上，

$$\|Tx\|=\sup\{|\xi|,|\xi_2-\xi|,\cdots,|\xi_n-\xi|,\cdots\}$$
$$\leqslant\sup_{n\geqslant 2}|\xi_n|+|\xi|\leqslant 2\|x\|,$$

故 T 有界，从而连续．其次，任取 $y=\{\eta_n\}\in c_0$，则

$$T^{-1}y=x=(\eta_1,\eta_2+\eta_1,\cdots,\eta_n+\eta_1,\cdots)$$

从而 $\|T^{-1}y\|\leqslant|\eta_1|+\sup\limits_{n\geqslant 2}|\eta_n|\leqslant 2\|y\|$，故 T^{-1} 也连续．因此，T 是由 c 到 c_0 上的线性同胚映射．然而不存在由 c 到 c_0 上的等距同构映射（参看第三章例 7）．

注　若两个赋范线性空间等距同构，则它们亦必线性同胚．上述反例说明了这个命题之逆并不成立．

4．存在两个不等距同构的 Banach 空间，其共轭空间彼此等距同构．

Banach 空间 c 和 c_0 并不等距同构（参看例 3），然而 c^* 和 c_0^* 是等距同构的．

5．$(L^\infty[a,b])^*$ 与 $L[a,b]$ 并不等距同构．

我们知道，当 $1\leqslant p<+\infty$ 时，$(L^p[a,b])^*$ 与 $L^q[a,b]$ 是等距同构的，这里，当 $p>1$ 时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，而当 $p=1$ 时，$q=+\infty$．

应当注意的是当 $p=+\infty$，$q=1$ 时，这一命题不再成立．为说明这一事实，我们只要证明存在 $f\in(L^\infty[a,b])^*$，使 f 不能表成带有一个固定的 $y\in L[a,b]$ 的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt$$

的形式，其中 $x\in L^\infty[a,b]$．为此，在区间 $[a,b]$ 上固定一点 t_0，我

们即可首先对有界函数 $x(t)$ 用公式 $f(x)=x(t_0)$ 来定义泛函 f. 显然,f 是 $L^\infty[a,b]$ 的子空间 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函. 然后把 f 扩张到整个空间 $L^\infty[a,b]$ 上的有界线性泛函. 这样得到的泛函就不可能表成所要求的形式,甚至仅仅对连续函数 $x(t)$ 来说这也是不可能的.

6. 存在某个可分Banach空间,它不含有线性同胚于 l 的子空间,且它的共轭空间不可分.

如果 X 是一个可分 Banach 空间,使得它的共轭空间 X^* 不可分,那么 X 是否一定含有线性同胚于 l 的子空间? 这是Banach空间理论中长期未解决的一个问题. Lindenstrauss 和 Stegall[202] 针对这一问题,作出了一个可分 Banach 空间,它不含有线性同胚于 l 的子空间,且它的共轭空间不可分. 我们简要地介绍他们的例子如下:

区间[0,1]的一切子区间的特征函数所张成的函数空间,其中的元素 f 的范数定义为

$$\|f\|=\sup\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

这里,sup 是对区间[0,1]的一切分划 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ 来取的. 这个空间的完备化空间记作 JF.

对每一 $f\in L[0,1]$ 及[0,1]的任一分划 $\{t_i\}_{i=0}^k$,都有

$$\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt\right|$$

$$\leqslant\int_0^1|f(t)|dt,$$

因此,$\|f\|\leqslant\|f\|_L$. 另一方面,如果 $f\geqslant 0$,取[0,1]的分划 $0=t_0<t_1=1$,则 $\|f\|=\|f\|_L$. 此外,容易看出具有有理数为端点的区间 $I\subset[0,1]$ 的特征函数 χ_I 的全体在 JF 中是稠密的,因而空间 JF

可分，且 $JF \subset L[0,1]$.

可以证明，共轭空间$(JF)^*$不可分，且 JF 不含有线性同胚于 l 的子空间. 证明细节可参看作者原文.

我们再简要地介绍 Lindenstrauss 和 Stegall 的另一个例子如下：令

$$T=\{(n,i): n=0,1,2,\cdots,0\leqslant i<2^n\},$$

定义T的半序如下：所谓$(m,j)\geqslant(n,i)$，是指 $m>n$ 且存在整数 $i_0=i$, i_1, $\cdots$, $i_k=j$ 具有 $k=m-n$, 而 $i_1\in\{2i, 2i+1\}$, $i_2\in\{2i_1, 2i_1+1\}$, $\cdots$, $i_k\in\{2i_{k-1}, 2i_{k-1}+1\}$. 称$T$为无限树，而称$\{(n,i),(n+1,i_1),\cdots,(n+k,i_k)\}$为$T$的节.

空间 JT 是定义在无限树T上的函数空间，它是由这样的实值函数 $x=x(n,i)$组成，使得

$$\|x\|=\sup\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{(n,i)\in\sigma_j} x(n,i)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}<+\infty, \qquad (1)$$

这里，sup 是对所有可能的两两不相交的节 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k$来取的. 由(1)式所规定的$\|\cdot\|$为 JT 上的范数，而且 JT 为 Banach 空间.

可以证明，JT 可分而$(JT)^*$不可分，JT 既不含有线性同胚于 l 的子空间，也不含有线性同胚于 c_0的子空间. 证明细节可参看作者原文.

注 若 Banach 空间X不含有与 c_0线性同胚的子空间，则称X为OP型空间.

OP 型空间的商空间是否仍是 OP 型空间？这是尚未解决的一个问题.

7. 一个赋范线性空间 X，它不线性同胚于 $X\times\mathbf{R}^1$.

Banach 空间理论中有下述问题：若X是 Banach 空间，则X是否必定与 $X\times\mathbf{R}^1$ 线性同胚？

Bessaga, Pelczyński 和 Rolewicz[48]于 1961 年作出了一个无

穷维完备的局部凸核度量线性空间 X，它不线性同胚于乘积空间 $X\times\mathbf{R}^1$. 1971 年，Rolewicz[268]作出了一个赋范线性空间 X，它不线性同胚于 $X\times\mathbf{R}^1$. 我们简要地介绍 Rolewicz 的例子如下：

设 Γ 是这样的正数列 $\{t_n\}$ 所成之集：若 $\{t_n\}\in\Gamma$ 且 $\{a_n\}$ 是有界正数列，则 $\{t_n a_n\}\in\Gamma$.

设 X 是具有范数 $\|\cdot\|$ 的赋范线性空间，X 称为 Γ 近似的，是指存在有限维子空间列 $\{L_n\}$，满足

(i) $\dim L_n=n-1$，$n=1,2,\cdots$；(ii) $L_n\subset L_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$；

(iii) $\{\delta_n(x)\}\in\Gamma$，这里 $\delta_n(x)=\inf\limits_{y\in L_n}\|x-y\|$.

由 Γ 的定义易知下述定理成立：

定理 1 若赋范线性空间 X 和 Y 是线性同胚的，则 X 为 Γ 近似的充要条件是 Y 为 Γ 近似的.

设 X 是一切这样的实数列 $x=\{\xi_n\}$ 所成的赋范线性空间，使得

$$M_x=\sup_n 2^{2^n}|\xi_n|<+\infty,$$

其范数定义为 $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 又设 Γ 是属于 X 的正数列所成之集，则有

定理 2 赋范线性空间 X 是 Γ 近似的.

证　设 L_n 是 X 中形如 $(a_1,\cdots,a_{n-1},0,\cdots)$ 的元素所组成的线性子空间. 显然，子空间列 $\{L_n\}$ 满足条件(i)，(ii). 此外，我们有

$$\delta_n(x)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{M_x}{2^{2^n}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{2^{2(2^i-2^n)}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\,\frac{M_x}{2^{2^n}}.$$

于是 $\{\delta_n(x)\}\in\Gamma$，因而 X 是 Γ 近似的.

还可证明下述定理：

定理 3 空间 $X\times\mathbf{R}^1$ 不是 Γ 近似的.

由定理 1 至定理 3 可知 X 不线性同胚于 $X\times\mathbf{R}^1$.

8. 存在 Banach 空间 B 与紧拓扑空间 X,Y，使 B^X 与 B^Y 等距同构，而 X 与 Y 并不同胚.

我们用 B^X 代表从拓扑空间 X 到实 Banach 空间 B 中的一切有界连续映射. 对 $f_1,f_2\in B^X$，定义

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\ x\in X,$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ \lambda\in\mathbf{R}^1,\ x\in X,$$
$$\|f\|=\sup_{x\in X}\|f(x)\|.$$

显然，B^X 为 Banach 空间.

Stone[303]证明了，若 B 是实数空间 $\mathbf{R}^1$，X 与 Y 都是拓扑空间，且 B^X 与 B^Y 等距同构，则 X 与 Y 必定同胚，即存在 X 到 Y 上的一对一的连续映射 φ，使逆映射 φ^{-1} 也是连续的.

Jerison[149]证明了，若 X，Y 是紧拓扑空间，B 是严格凸的 Banach 空间，且 B^X 与 B^Y 等距同构，则 X 与 Y 必定同胚.

应当注意，对于一般的 Banach 空间，Jerison定理并不成立。例如，设 Z 为单位区间，而令

$$X=\left\{(\lambda,\mu):(\lambda,\mu)\in R^2,\frac{1}{2}\leqslant\lambda^2+\mu^2\leqslant 1\right.$$
$$\left.\text{或 } 0\leqslant\lambda\leqslant 2,\ \mu=0\right\},$$

$$Y=\left\{(\lambda,\mu):(\lambda,\mu)\in R^2,\frac{1}{2}\leqslant\lambda^2+\mu^2\leqslant 1\right.$$
$$\left.\text{或 } \lambda=0,\ 1\leqslant\mu\leqslant 2\right\},$$

并在 Z,X,Y 上赋予通常的拓扑，则 Z,X,Y 均为紧拓扑空间. 不难看出，拓扑空间 $Z\times X$ 与 $Z\times Y$ 是同胚的，从而对任一 Banach 空间 B，Banach 空间 $B^{Z\times X}$ 与 $B^{Z\times Y}$ 是等距同构的. 因为 Z 是紧

拓扑空间,故由 $B^{Z\times X}$ 到 $(B^Z)^X$ 上的自然嵌入映射是一对一的等距同构映射,即 Banach 空间 $B^{Z\times X}$ 与 $(B^Z)^X$ 是等距同构的. 由此可知,Banach 空间 $(B^Z)^X$ 与 $(B^Z)^Y$ 也是等距同构的. 然而,拓扑空间 X 与 Y 并不同胚.

9. $L^p[a,b]$(或l^p)($1<p<+\infty$, $p\neq 2$)的某个闭子空间 M,对于它,不存在闭子空间 N 而有 $L^p[a,b]$(或 l^p)$=M\oplus N$.

我们知道,若 X 为 Hilbert 空间,则 X 的任一闭子空间 M 必在 X 中可补,即存在由 X 到 M 上的有界线性射影算子. 这等价于存在闭子空间 $N\subset X$,使 $M\cap N=\{0\}$ 且 $X=M+N$,即

$$X=M\oplus N.$$

Banach 提出如下两个问题(参看[37],pp.244—245):

(i) 空间 $L^p[a,b]$($1<p<+\infty$, $p\neq 2$)中的每个闭子空间 M 是否一定在 $L^p[a,b]$ 中可补?

(ii) 空间 l^p($1<p<+\infty$, $p\neq 2$)中的每个闭子空间 M 是否一定在 l^p 中可补?

Murray[222]指出,这两个问题的答案都是否定的. 这里,我们简要地介绍他的工作如下:

用 l_n^p($1<p<+\infty$, $p\neq 2$) 代表一切有序实数组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 所组成的 Banach 空间,其中范数定义为

$$\|(a_1,\cdots,a_n)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $n=\infty$ 时,$l_\infty^p=l^p$.

设 M 是 Banach 空间 X 的闭子空间,关于 M 的实值函数 $C(M)$ 定义如下:

$$C(M)=\begin{cases}+\infty, & \text{由 } X \text{ 到 } M \text{ 上的有界线性射影算子不存在,}\\ \inf\|Q\|, & Q(X)=M,\ Q \text{ 是 } X \text{ 到 } M \text{ 上的有界线性射影算子.}\end{cases}$$

类似地，实值函数$\bar{C}(X)$定义为

$$\bar{C}(X)=\sup\{C(M):M\subset X\}.$$

可以证明下述定理：

定理 1 存在$L^p[a,b](1<p<+\infty, p\neq 2)$中的闭子空间$M$及$l^p(1<p<+\infty,p\neq 2)$中的闭子空间$M'$，使得$C(M)=\bar{C}(L^p[a,b])$，$C(M')=\bar{C}(l^p)$，而且

$$1=\bar{C}(l_1^p)\leqslant\bar{C}(l_2^p)\leqslant\cdots\leqslant\bar{C}(l^p)\leqslant\bar{C}(L^p[a,b]).$$

定理 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{C}(l_n^p)=+\infty.$

由定理1与定理2得到$\bar{C}(L^p[a,b])=\bar{C}(l^p)=+\infty$，从而存在$L^p[a,b]$(或$l^p$)$(1<p<+\infty,p\neq 2)$的闭子空间$M$使$C(M)=+\infty$。于是，由函数$C(M)$的定义可知对于这个闭子空间$M$，不存在闭子空间$N$而有

$$L^p[a,b](\text{或 } l^p)=M\oplus N.$$

注 Banach 和 Mazur[36]指出，空间$C[0,1]$中存在不可补的闭子空间；这是完备赋范线性空间中存在不可补闭子空间的第一个例子。进一步的例子是空间$L^p[0,1](1\leqslant p<+\infty, p\neq 2)$，$l^p(1\leqslant p<+\infty,p\neq 2)$，$c_0,m$，$M$，这些例子分别由Murray[222]，Sobczyk[287]，Philips[248]和Komatuzaki[178],[179]获得的。

由于上述例子，便自然产生问题：这些现象是个别的，还是对一般的Banach空间(不等距同构于Hilbert空间)都成立？Lindenstrauss和Tzafriri[202]指出，这个问题的答案是肯定的，即每个实Banach空间，如果它不等距同构于一个Hilbert空间，那么其中必定存在不可补的闭子空间。

设X,Y都是Banach空间，$K(X,Y)$代表由X到Y的紧算子的全体。Thorp[312]和Arterburc及Whitley[23]分别指出，一般说来，空间$K(X,Y)$在$L(X,Y)$中是不可补的。例如，空间$K(l,l)$，$K(l^\infty,l^\infty)$，$K(l^\infty,c_0)$，$K(c_0,l^\infty)$分别在$L(l,l)$，$L(l^\infty,l^\infty)$，$L(l^\infty,c_0)$，$L(c_0,l^\infty)$中不可补。至于$K(l^\infty,c)$在$L(l^\infty,c)$中是否

可补？这是尚未解决的一个问题.

10. 存在 Banach 空间 X，使 X 的每个无穷维可补子空间都线性同胚于 X.

Pelczyński[239]指出：Banach 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$和 c_0 的每个无穷维相补子空间分别线性同胚于 l^p 和 c_0. 证明细节可参看作者原文.

注 Pelczyński 提出下述问题：l^∞ 的每个无穷维可补子空间是否皆与 l^∞线性同胚？Lindenstrauss[196]指出：l^∞ 的无穷维子空间为可补子空间的充要条件是它与 l^∞ 线性同胚，从而肯定地回答了 Pelczyński 的问题.至于是否还存在其它的 Banach 空间X，使X的每个无穷维可补子空间皆与X线性同胚，这是尚未解决的一个问题. 此外，下述问题也是没有解决的：Banach 空间 $C(S)$的每个无穷维可补子空间是否必定线性同胚于某个 Banach 空间 $C(S_1)$？ 这里S,S_1 均为紧 Hausdorff 空间.

11. 一个具有无条件 Schauder 基的弱平行四边形空间，它不线性同胚于空间 l^2.

赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$称为弱平行四边形空间，是指存在 $r\ (0<r\leqslant1)$，使对一切 $x,y\in X$，都有

$$\|x+y\|^2+r\|x-y\|^2\leqslant2\|x\|^2+2\|y\|^2. \tag{1}$$

Kay[171]指出，对每一正整数 n，l_n^p 是弱平行四边形空间，这里，l_n^p 代表 $l^p(1<p<+\infty)$中的一切这样的 $x=\{\xi_k\}$所成的子空间，使当 $k>n$ 时 $\xi_k=0$. 应当注意，空间 l_n^p 的维数是有限的. 于是便自然提出下述问题：是否存在具有无条件基的无穷维弱平行四边形空间，它不线性同胚于空间 l^2？ Bynum 和 Drew[66]指出：当 $1<p\leqslant2$ 时，l^p 本身也是弱平行四边形空间. 由于 l^p 具有无条件基，而且因为 l^2 不线性同胚于 $l^p(1\leqslant p<+\infty,\ p\neq2)$ 的任何子空间(参看[37])，从而肯定地回答了上述问题.

为证明 $l^p(1<p\leqslant 2)$是弱平行四边形空间，先证明下述

引理 设 $1<1+r\leqslant p\leqslant 2$，$a,b$ 为实数，则

$(a+b)^2+r(a-b)^2\leqslant 2^{2-\frac{2}{p}}(|a|^p+|b|^p)^{\frac{2}{p}}$.

证 令 $k=2-\dfrac{2}{p}$，t 为实数，并令

$$h(t)=2^k(1+|t|^p)^{\frac{2}{p}}-(1+t)^2-r(1-t)^2.$$

由于当 $t\neq 0$ 时 $h(t)=t^2h\left(\dfrac{1}{t}\right)$，以及由于 $h(t)\geqslant h(|t|)$，故只要证明在区间 $[0,1]$ 上恒有 $h\geqslant 0$ 即可．为此，任取 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，并令

$$g(x)=(2-p)x^k+(p-1)x^{k-1},$$

则 $g'(x)\leqslant 0$，故函数 g 在区间$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上是递减的．又对 $[0,1]$中的 t，有

$$h''(t)=2^{k+1}g\left(\frac{t^p}{(1+t^p)}\right)-2-2r,$$

故 h'' 在$[0,1]$上是递减的．因为

$$h''(1)=2(p-1-r)\geqslant 0,$$

所以对任何 $t\in[0,1]$，均有 $h''(t)\geqslant 0$，从而 h' 在$[0,1]$上是递增的．但 $h'(1)=0$，故知 h 在$[0,1]$上递减，且对任何$t\in[0,1]$，均有 $h(t)\geqslant h(1)=0$．引理证毕．

我们还要用到下述 Hanner[127]得到的定理：

定理 设 $1<p\leqslant 2$ 且 $x,y\in l^p$，则

$$(\|x\|+\|y\|)^p+|\|x\|-\|y\||^p\leqslant\|x+y\|^p+\|x-y\|^p.$$

兹证当 $1<p\leqslant 2$ 时，l^p 是弱平行四边形空间．为此，任取 x、$y\in l^p$，并令

$$2a=\|x+y\|-\|x-y\|,$$

$$2b=\|x+y\|-\|x-y\|,$$

我们可把 Hanner 定理中的不等式写成

$$a^p+|b|^p\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p.$$

设 $r=p-1$, $k=2-\frac{2}{p}$，分别应用引理、**Hanner 定理以及 Hölder** 不等式，就得到

$$\begin{aligned}(a+b)^2+r(a-b)^2&\leqslant 2^k(a^p+|b|^p)^{\frac{2}{p}}\\&\leqslant 2^k(\|x\|^p+\|y\|^p)^{\frac{2}{p}}\\&\leqslant 2^k2^{1-k}(\|x\|^2+\|y\|^2),\end{aligned}$$

即 $l^p(1<p\leqslant 2)$ 是弱平行四边形空间.

12. 对 $p\neq 2$, $L^2[0,1]$ 仍与 $L^p[0,1]$ 的某个子空间线性同胚.

Banach[37]指出，l^2 不与 $l^p(1\leqslant p<+\infty, p\neq 2)$ 的任何一个子空间线性同胚. 然而，$L^2[0,1]$ 却与 $L^p[0,1](1\leqslant p<+\infty, p\neq 2)$ 的某个子空间线性同胚.我们先陈述一个定理，证明可参看[15].

定理 设 $r_n(t)=\operatorname{sgn}\sin 2^n\pi t(n=1,2,\cdots)$ 为区间$[0,1]$上的 Rademacher 函数系，则对每一 $p(1\leqslant p<+\infty)$，存在常数 A_p 和 B_p，使对任意m个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，恒有

$$\begin{aligned}A_p\left(\sum_{n=1}^m|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}&\leqslant\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m a_nr_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant B_p\left(\sum_{n=1}^m|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

兹证 $L^2[0,1]$与 $L^p[0,1](1\leqslant p<+\infty, p\neq 2)$ 的某个子空间线性同胚. 事实上，由 Riesz-Fischer 定理，$L^2[0,1]$ 与 l^2 等距同构，故只须证明 l^2 与 $L^p[0,1]$ 的某个子空间线性同胚即可. 对 $a=(a_1,a_2,\cdots)\in l^2$， 令

$$T(a)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr_n(t),$$

由定理知T是由 l^2 到 $L^p[0,1]$的映射，并且是 l^2到 $L^p[0,1]$的

一个线性同胚映射.

13. $L^p[0,1]$与$l^p(1\leqslant p<+\infty, p\neq 2)$不线性同胚.

由 Riesz-Fischer 定理,$L^2[0,1]$与l^2等距同构. 于是自然要问:当$p\neq 2$时,$L^p[0,1]$与l^p是否线性同胚?下面指出,当$1\leqslant p<+\infty, p\neq 2$时,$L^p[0,1]$与$l^p$不线性同胚. 事实上,由例 12 知$L^p[0,1]$有子空间线性同胚于$l^2$. 假如$l^p$与$L^p[0,1]$线性同胚,那么$l^2$将与$l^p$的某个子空间线性同胚,然而这是不可能的.

14. 内射空间.

设X为 Banach 空间,如果X在包含它的任一 Banach 空间Y中是可补的,则称X为内射空间.

容易证明,Banach 空间X为内射空间的充要条件是,对每个 Banach 空间$Y\supset X$,每个 Banach 空间Z及每个$T\in L(X,Z)$,恒存在一个$\hat{T}\in L(Y,Z)$,使$\hat{T}$为T的扩张.

我们将要证明,Banach 空间$L^\infty[0,1]$为内射空间. 事实上,设 Banach 空间$Y\supset L^\infty[0,1]$,e为$L^\infty[0,1]$中的单位元,作$Y\to L^\infty[0,1]$的映射g:

$$g(x)=\|x\|e(x\in Y).$$

设f为$L^\infty[0,1]$到$L^\infty[0,1]$上的恒等映射,则$f\leqslant g|M(M\supset L^\infty[0,1]$,这里"$\leqslant$"是$L^\infty[0,1]$中按$x-y\geqslant 0$规定的序关系$x\geqslant y)$. 如果能把$f$扩张为$Y\to L^\infty[0,1]$的算子$P$,并且$P\leqslant g$,则$P$是一个由$Y$到$L^\infty[0,1]$上的范数为1的射影算子. 这样一来,$L^\infty[0,1]$在$Y$中可补,从而$L^\infty[0,1]$是内射空间. 下面证明$f$的这种扩张是存在的.

设F是f在Y的某个子空间M上的扩张,$L^\infty[0,1]\subset M\subset Y$,并且$F\leqslant g|M$,$\mathscr{F}$为$f$的所有这种扩张的全体,若$F_1, F_2\in\mathscr{F}$,并且$F_2$为$F_1$的扩张,则称$F_1\leqslant F_2$,这样$\mathscr{F}$为半序集. 利用 Zorn 引理,$\mathscr{F}$有最大元存在,设$\tilde{F}$为一个最大元,$\tilde{F}$的定义域为

$\widetilde{M},\widetilde{F}\leqslant g|\widetilde{M},\widetilde{F}$ 为 f 的扩张，只须指出 $\widetilde{M}=Y$ 即可. 假如不然，则存在 $x_0\in Y\backslash\widetilde{M}$. 令 $\widetilde{M}_0=\text{span}\{x_0,\widetilde{M}\}$，则 $x'\in\widetilde{M}_0$ 可唯一地表为

$$x'=x+tx_0(x\in\widetilde{M},t\in\mathbf{R}^1).$$

对于 $x,y\in\widetilde{M}$，有

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(y)-\widetilde{F}(x)=\widetilde{F}(y-x)&\leqslant g(y-x)\\&\leqslant g(y+x_0)+g(-x_0-x),\end{aligned}$$

因此

$$-g(-x_0-x)-\widetilde{F}(x)\leqslant g(y+x_0)-\widetilde{F}(y).$$

因为上述不等式的左端不依赖于 y，右端不依赖于 x，所以存在一个 $\beta\in L^\infty[0,1]$满足不等式

$$-g(-x_0-x)-\widetilde{F}(x)\leqslant\beta\leqslant g(x+x_0)-\widetilde{F}(x)\quad(x\in\widetilde{M})$$

（β 的存在性的证明从略）.

作 $\widetilde{M}_0\to L^\infty[0,1]$的算子$\widetilde{F}_0$:

$$\widetilde{F}_0(x+tx_0)=\widetilde{F}(x)+t\beta(x\in\widetilde{M},t\in\mathbf{R}^1).$$

显然，$\widetilde{F}_0$ 为 F 的扩张，并且由 β 的选择及 $g(tx)=|t|g(x)$ 可知 $\widetilde{F}_0\leqslant g|\widetilde{M}_0$. 但是 $\widetilde{F}_0\geqslant\widetilde{F},\widetilde{F}_0\neq\widetilde{F}$，这与$\widetilde{F}$的最大性发生矛盾.

15. Banach 空间 $L^\infty[0,1]$ 与 l^∞ 线性同胚.

当 $1\leqslant p<+\infty,p\neq2$ 时，$L^p[0,1]$与 l^p 不线性同胚(参看例13). Pełczyński 指出：当 $p=+\infty$时，$L^p[0,1]$与 l^∞是线性同胚的. 为证明这一陈述，我们要用到下述

引理 设 X,Y 是两个 Banach 空间，其中每一个都与另一个空间的某个可补子空间线性同胚. 如果(i) X 与 $X\times X$ 线性同胚，Y 与 $Y\times Y$ 线性同胚，或者(ii) X 与 $X\times X\times\cdots$ 线性同胚，那么 X 与 Y 线性同胚.

利用上述引理，我们将要证明 $L^\infty[0,1]$与 l^∞线性同胚. 证明分下面几步：

(1) 记 $X=L^\infty[0,1]$，$Y=l^\infty$，则 X 与 $X\times X$ 线性同胚、Y 与 $Y\times Y$ 线性同胚. 事实上，对每一 $x\in L^\infty[0,1]$，令

$$x_1(t)=x\left(\frac{t}{2}\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$x_2(t)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

显然，$x_1,x_2\in L^\infty[0,1]$. 作$X\to X\times X$的映射T：

$$Tx=(x_1,x_2),$$

则

$$\|Tx\|=\|(x_1,x_2)\|\leqslant 2\|x\|.$$

另一方面，对每个$(x_1,x_2)\in X\times X$，作

$$x(t)=\begin{cases} x_1(2t), & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ x_2(2t-1), & t\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$$

则$x\in X$. 因此T为X到$X\times X$上的线性同胚映射.

其次，设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in Y$，令

$$x_1=(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi_{2n-1},\cdots),$$
$$x_2=(\xi_2,\xi_4,\cdots,\xi_{2n},\cdots),$$

则$Tx=(x_1,x_2)$为Y到$Y\times Y$上的线性同胚映射.

(2) l^∞与$L^\infty[0,1]$的某个可补子空间等距同构.

把$[0,1]$表为可数个互不相交的区间$\Delta_n(n=1,2,\cdots)$，设$x=\{\xi_n\}\in l^\infty$，令

$$y(t)=\sum_{n=1}^\infty \xi_n\chi_{\Delta_n}(t),$$

这里χ_{Δ_n}为区间Δ_n的特征函数，则$y\in L^\infty[0,1]$，且

$$\|x\|_{l^\infty}=\|y\|_{L^\infty[0,1]}.$$

现指出空间$Z=\left\{\sum_{n=1}^\infty \xi_n\chi_{\Delta_n}(t):\{\xi_n\}\in l^\infty\right\}$在$L^\infty[0,1]$中可

补. 事实上，对 $y\in L^\infty[0,1]$，记 $\xi_n=\sup\limits_{t\in\Delta_n}|y(t)|$，$Py=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\chi_{\Delta_n}$，

则 P 为 $L^\infty[0,1]$ 到 Z 上的有界线性算子，并且

$$P^2y=Py(y\in Z),$$

因此 P 为 $L^\infty[0,1]$ 到 Z 上的有界线性射影算子，即 Z 在 $L^\infty[0,1]$ 中可补.

(3) $L^\infty[0,1]$ 可嵌入到 l^∞ 中作为 l^∞ 的一个可补子空间.

因为 $L[0,1]$ 是可分的，所以在 $L[0,1]$ 的单位球上存在一个可数稠密子集 $\{x_n\}$. 对每一 $f\in(L[0,1])^*=L^\infty[0,1]$，令

$$Tf=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),\cdots),$$

由于 $\sup\limits_n|f(x_n)|=\|f\|$，因而 T 为 $L^\infty[0,1]$ 到 l^∞ 中的一个一对一的有界线性算子，并且是到 l^∞ 中的一个等距映射，因此 $l^\infty\supset L^\infty[0,1]$. 由例 14，$L^\infty[0,1]$ 为内射空间，所以 $L^\infty[0,1]$ 在 l^∞ 中可补，实即 $L^\infty[0,1]$ 与 l^∞ 的一个可补子空间等距同构. 由引理可知，$L^\infty[0,1]$ 与 l^∞ 线性同胚.

16. l^2 与 l^∞ 的某个商空间线性同胚.

我们先证明下面的

定理 设 X 为赋范线性空间，M 为 X 的子空间，则 M^* 等距同构于 $X^*/M^\perp$，其中

$M^\perp=\{f\in X^*: f(x)=0，当 x\in M 时\}$.

证 显然，$M^\perp$ 为 X^* 的闭线性子空间. 设 $\tilde{f}$ 为 $X^*/M^\perp$ 中的一个元素，$\tilde{f}$ 表示 X^* 中与 f 等价的元素类，即集 $f+M^\perp$. 作 M 上的泛函 φ：

$$\varphi(x)=f(x)(x\in M).$$

由于当 $g\in\tilde{f}$ 时，$g-f\in M^\perp$，所以对一切 $x\in M$，$f(x)=g(x)$；因此 φ 是完全确定的，并且不依赖类 $\tilde{f}$ 中代表元素的选取. 其次，φ 为 M 上的有界线性泛函. 事实上，对每一 $g\in\tilde{f}$，有

$$|\varphi(x)|=|g(x)|\leqslant\|g\|\|x\|,$$

所以$\|\varphi\|_M\leqslant\|\tilde{f}\|=\inf\limits_{g\in\tilde{f}}\|g\|$.再由 Hahn-Banach 定理,存在$g\in X^*$,使$\|g\|=\|\varphi\|_M$,且当$x\in M$时$g(x)=\varphi(x)$. 因此,$g\in\tilde{f}$,从而$\|g\|\geqslant\|\tilde{f}\|$. 这样一来,

$$\|\varphi\|_M=\|\tilde{f}\|.$$

至于φ的线性那是显然的.

作$X^*/M^\perp$到M^*的映射$T:\varphi=T(\tilde{f})$,φ为上面的由$\tilde{f}$界定的M上的泛函. 易知T为线性的,并且上面已指出T为$X^*/M^\perp$到M^*的等距映射. 现指出T的值域为M^*,从而M^*与$X^*/M^\perp$等距同构. 为此,任取$\varphi\in M^*$,由 Hahn-Banach定理,存在$f\in X^*$,$f(x)=g(x)$ $(x\in M)$. 如上知$\tilde{f}$在映射T之下的象恰为φ,因此T的值域为M^*. 证毕.

兹证l^2与l^∞的一个商空间线性同胚. 事实上,由例 12 知$L[0,1]$有一子空间M线性同胚于l^2. 据上面的定理,M^*等距同构于

$$(L[0,1])^*/M^\perp=L^\infty[0,1]/M^\perp.$$

因$(l^2)^*=l^2$,故l^2线性同胚于$L^\infty[0,1]$的一个商空间;又据例15,$L^\infty[0,1]$与l^∞线性同胚,因此,l^2与l^∞的一个商空间线性同胚.

注 我们有下述问题:设X是 Banach 空间,Y是X的闭子空间. 若Y与商空间X/Y都线性同胚于 Hilbert 空间,则X是否必定线性同胚于 Hilbert 空间? Enflo, Lindenstrauss 和 Pisier[100]指出,这个问题的答案是否定的.

17. 不存在l^∞到c_0上的连续射影算子.

Phillips[248]指出,不存在l^∞到c_0上的连续射影算子. Whitley[321]给出了这一断语的简单证明. 他称 Banach 空间X具有性质B,如果X^*含有一个可数的全整子集. 易见,具有性质B的Banach 空间的线性同胚象仍有性质B;具有性质B的Banach 空

间的闭子空间也有性质B；又，Banach 空间 l^∞ 具有性质B．

假如存在由 l^∞ 到 c_0 上的连续射影算子，那么 $l^\infty=c_0\oplus N$．这里，N 是具有性质B的 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间，因而也有性质B．由于 l^∞/c_0 线性同胚于 N，故 l^∞/c_0 应有性质B．然而可以证明，l^∞/c_0 并无性质B．因此，不存在 l^∞ 到 c_0 上的连续射影算子．

注 Pelczyński 和 Sudakov[244]指出，若 $m(S)$ 代表定义在无限集 S 上的一切有界实值函数 $x(t)$ 所成之集，并在 $m(S)$ 上取上确界范数．$m_0(S)$ 代表 $m(S)$ 的这样的子空间，它由下述函数组成：对每一 $\varepsilon>0$，集 $\{s\in S:|x(s)|>\varepsilon\}$ 的势小于集 S 的势，则不存在 $m(S)$ 到 $m_0(S)$ 上的连续射影算子，从而推广了 Phillips 的结果．

设 A 是一个保存矩阵，即对每一 $x\in c$，都有 $Ax\in c$．又设 c_A 是 l^∞ 的一个子空间，它由一切这样的 $x\in l^\infty$ 组成，使得 $Ax\in c$．显然，c_A 是 l^∞ 的一个包含 c 的闭子空间，可能会有 $c_A=c$．例如，当 A 是单位矩阵时就是如此．若 $c_A\neq c$，则容易证明 c_A 不可分．Wilansky 猜测，若 $c_A\neq c$，则不存在 c_A 到 c 上的连续射影算子．Lindenstrauss[193]证实了 Wilansky 的猜测，他证明：若 A 是保存矩阵，令 $c_A=A^{-1}(c)\cap l^\infty$，则或者 $c_A=c$，或者不存在 c_A 到 c 上的连续射影算子．

18．存在某个 Banach 空间 X 的商空间，它不线性同胚于 X 的任何一个子空间．

取 $X=l^\infty$，$M=c_0$，则不存在 M 在 X 中的可补子空间，故 M 不是 X 的商空间，这就说明了 X 的商空间可能不线性同胚于 X 的任何子空间．

注 若 M 是 X 的可补子空间，例如 $X=M\oplus N$，则 M 是 X 的一个商空间．事实上，射影 $x+y\in M\oplus N\to x\in M$ 是线性连续的开映射，且 M 线性同胚于 X/N．于是，X 的可补子空间必是 X

的商空间．然而，商空间未必是可补子空间．例如，l^∞/c_0 是 l^∞ 关于 c_0 的一个商空间，它在 l^∞ 中并不可补．

19．一个 Banach 空间，它不是某个 Banach 空间的共轭空间．

因为 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 的单位闭球是弱*紧的，故由 Krein-Milman 定理，X^* 的单位闭球必有端点．由第二章例45可知，Banach 空间 $L[0,1]$ 的单位闭球没有端点，因而 $L[0,1]$ 不是某个 Banach 空间的共轭空间，并且也不线性同胚于一个共轭空间（因为弱*紧性在线性同胚下不变）．

Banach 空间 c_0 的单位闭球也是没有端点的，故它也不线性同胚于一个共轭空间．

注　Klee 于1950年指出，在 Banach 空间 l^∞ 上可以赋予等价范数 $\|\cdot\|$，使 $(l^\infty, \|\cdot\|)$ 不与任何一个共轭空间线性同胚．William, J. D 和 William, J. B.[331] 进一步指出，对于每个非自反的 Banach 空间，都可以在它上面赋予这种等价范数．

Wojtaszczyk[312] 指出，若 X 是可分的 Banach 空间，使每个可分自反 Banach 空间都线性同胚于 X 的某个子空间，则 X 不与任何一个共轭空间线性同胚．

20．一个 Banach 空间 X 的共轭空间 X^*，在 X^* 上赋予与原范数等价的某个范数 M^*，而 (X^*, M^*) 不是 (X, P_{M^*}) 的共轭空间，其中 P_{M^*} 是 X 上的由 M^* 导出的范数．

设 (X, N) 是 Banach 空间，其共轭空间为 (X^*, N^*)，假如 M^* 是 X^* 上的另一个范数，使 (X^*, M^*) 与 (X^*, N^*) 线性同胚．对每一 $x\in X$，令

$$P_{M^*}(x)=\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|_{M^*}\leqslant 1}}|f(x)|,$$

则 P_{M^*} 是 X 上的一个范数，且 (X, N) 线性同胚于 (X, P_{M^*})．于是便产生问题：(X^*, M^*) 是否必为 (X, P_{M^*}) 的共轭空间，即 M^* 是否必为一个共轭范数？James[141] 对非自反的 Banach 空

间X，作出了一个与X^*上原范数等价的新范数，这个新范数不是共轭范数。构造细节可参看作者原文。

注 其实可以证明，若X为Banach空间，则X^*上每个与原范数等价的范数皆为共轭范数的充要条件是X为自反的(参看[16])。

21．拟相补的子空间.

赋范线性空间X的子空间Y，Z称为拟相补的，是指Y，Z都是闭的，且$Y\cap Z=\{0\}$，$Y+Z$是X的稠密的真子空间.

设X是这样的实数列$x=\{\xi_n\}$所成的线性空间，使$s_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$收敛．令

$$\|x\|=\|s_n\|_\infty=\sup_n|s_n|,$$

则X成为一个赋范线性空间．令

$$Y=\{x\in X:当n为奇数时\xi_n=0\},$$

$$Z=\{x\in X:当n为偶数时\xi_n=0\},$$

则Y，Z都是X的闭子空间，且$Y\cap Z=\{0\}$．因为$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}\in X$，而$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}\notin Y+Z$，故$Y+Z\neq X$．又设$E^\infty$是一切只有有限项非零的数列所成的$X$的子空间，则$E^\infty\subset Y+Z$．由于$E^\infty$在$X$中是稠密的，因而$Y+Z$在$X$中也是稠密的，所以$Y$与$Z$是拟相补的.

注 Rosenthal[258]指出，当Γ为可数集时，$c_0(\Gamma)$在$l^\infty(\Gamma)$中是拟可补的，即在$l^\infty(\Gamma)$中存在另一个闭子空间Z，使$c_0(\Gamma)$与Z是拟相补的．Lindenstrauss[187]指出，当Γ为不可数集时，$c_0(\Gamma)$在$l^\infty(\Gamma)$中并不拟可补.

Zippin[336]作出了c_0中的一个条件基$\{x_n\}$，使$\{x_n\}$的某个子列$\{x_{n_k}\}$张成的闭子空间在c_0中不可补.

22．Banach 空间的同胚性．

Fréchet 和 Banach[27]提出下述问题：是否所有无穷维可分 Banach 空间彼此都是同胚的？

Кадец[155]于 1953 年指出，空间 l 和 c_0 是同胚的．之后，Кадец[158]又指出，一切无穷维自反的可分 Banach 空间都同胚于 l．Bessaga 和 Pelczyński[44],[46]进一步证明了所有常见的无穷维 Banach 空间都同胚于 l．1967 年，Кадец[156]证明了所有无穷维可分的 Banach 空间彼此都同胚，从而解决了 Fréchet 和 Banach 提出的上述问题．在此基础上，Anderson[27]进一步指出，所有无穷维可分的 Fréchet 空间彼此都是同胚的．

对于不可数集 Γ，Trojanski 证明了 $c_0(\Gamma)$ 与 $l(\Gamma)$ 是同胚的，从而回答了 Bessaga[40]的一个问题．至于是否每个不可分的 Banach 空间都同胚于某个 Hilbert 空间？这是尚未解决的一个问题．

23．一致同胚而不线性同胚的 Banach 空间．

两个 Banach 空间 X 与 Y 称为一致同胚的，如果存在 X 到 Y 上的一对一的映射 f，使 f 和 f^{-1} 都是一致连续的；X 与 Y 称为 Lipschitz 同胚的，如果存在 X 到 Y 上的一对一的映射 f，适合条件：存在常数 $C\geqslant 1$，使对任意 x，$y\in X$，都有

$$C^{-1}\|x-y\|\leqslant\|f(x)-f(y)\|\leqslant C\|x-y\|.$$

显然，如果两个 Banach 空间是 Lipschitz 同胚的，那么它们亦必是一致同胚的．

关于 Banach 空间理论有下述基本问题：两个一致同胚（或 Lipschitz 同胚）的 Banach 空间是否一定是线性同胚的？

Aharoni 和 Lindenstrauss[23]否定地回答了这个问题．1978 年，他们指出了 Banach 空间 $c_0(\Gamma)$ 是 Lipschitz 同胚（从而也一致同胚）于 l^∞ 的某个子空间，但 $c_0(\Gamma)$ 不线性同胚于 l^∞ 的任一子空间．读者如有兴趣，可参看作者的原文．

在 Aharoni 和 Lindenstrauss 的反例中，两个空间都是既不可分也不自反的，于是便产生下述问题：

问题 1 设X与Y是两个可分（或自反，或可分且自反）的 Banach 空间，如果X一致同胚于Y，那么X是否线性同胚于Y？如果X与Y是 Lipschitz 同胚的，那么它们是否线性同胚？

Heinrich 和 Mankiewicz[131]证明了：若X，Y是两个可分且自反的 Banach 空间，其中每一个线性同胚于它的 Cartesian 平方，且X，Y是 Lipschitz 同胚的，那么它们必定是线性同胚的.

基于这一断语，便产生下述问题：

问题 2 设X，Y是 Lipschitz 同胚的两个 Banach 空间.

(a) 若Y线性同胚于它的平方Y^2，则X是否具有同样的性质？

(b) 若Y线性同胚于它的共轭空间，则X是否也线性同胚于它的共轭空间？

Heinrich 和 Mankiewicz 还证明了：若Y是l^p或$L^p[0,1]$ $(1<p<+\infty)$，或是区间$[0,1]$上的自反的 Orlicz 空间，又，X为 Banach 空间且 Lipschitz 同胚于Y，则X必定线性同胚于Y.

问题 3 若 Banach 空间X是 Lipschitz 同胚于 Banach 空间l，则X是否线性同胚于l？

问题 4 若 Banach 空间X是 Lipschitz 同胚于Y，且Y具有有界完全的对称基，则X是否线性同胚于Y？

Heinrich 和 Mankiewicz 指出，若X本身也有有界完全的对称基，则问题 4 的答案是肯定的.

问题 5 设 $1\leqslant p<+\infty$，$p\neq 2$，则l^p是否一致同胚于$L^p[0,1]$？

第九章　向量值函数

引言

本章主要涉及定义在测度空间(或数域的子集)上而在赋范线性空间内取值的向量值函数的例子. 给出基本定义和定理如下:

定义 1　设$x(t)$是从数集$D\subset K$到赋范线性空间X内的向量值函数,那么,(i)称$x(t)$在点$t_0\in D$弱连续,是指对任意$f\in X^*$,都有

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in D}}|f[x(t)]-f[x(t_0)]|=0;$$

(ii)称$x(t)$在点$t_0\in D$强连续,是指它满足条件

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in D}}\|x(t)-x(t_0)\|=0;$$

(iii)如果向量值函数$x(t)$在D上每一点均是弱(强)连续的,那么,我们称$x(t)$在D上弱(强)连续的.

易见,如果$x(t)$在t_0点强连续,那么它在t_0点亦必弱连续.

定义 2　从区间$[a,b]$到Banach空间X的向量值函数$x(t)$,(i)称为弱有界变差的,是指对任意$f\in X^*$,数值函数$f[x(t)]$都是有界变差函数;(ii)称为有界变差的,是指对$[a,b]$中所有有限个互不相交的区间$(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$,均有

$$\sup\left\|\sum_{i=1}^{n}[x(b_i)-x(a_i)]\right\|<+\infty;$$

(iii)称为强有界变差的,是指对上述所有区间而言,均有

$$\sup\sum_{i=1}^{n}\|x(b_i)-x(a_i)\|<+\infty,$$

并且上述的两个上确界分别称为全变差和强全变差. 类似地,我们可以导出相应的关于弱绝对连续,绝对连续及强绝对连续的三

个定义.

定义 3 设G是数域K的开子集,$t_0\in G$,$x(t)$是从G到赋范线性空间X内的向量值函数. 我们称$x(t)$在点t_0是弱(强)可导的,是指存在一元$x_0\in X$,使得$\frac{[x(t_0+h)-x(t_0)]}{h}$当$h\to 0$时弱(强)收敛于$x_0$. 为明确起见,我们常将$x_0$记为$x'(t_0)$,并称其为$x(t)$在$t_0$点的弱(强)导数. 如果$x(t)$在$G$内每一点均是弱(强)可导的,那么,称它在$G$内是弱(强)可导的.

定理 1 如果$x(t)$在区域$G\subset K$内的一点t_0是弱可导的,那么,对任意$f\in X^*$,相应的数值函数$f[x(t)]$必在t_0点可导(并且$\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}=f[x'(t_0)]$,其中$x'(t_0)$为$x(t)$在$t_0$点的弱导数);反之,当Banach空间$X$还是弱序列完备时,逆命题也是成立的.

定理 2 如果$x(t)$在区域$G\subset K$内的t_0点是强可导的,那么,它在t_0点也必弱可导且其弱导数就是其强导数.

定理 3 如果$x(t)$在区域$G\subset K$内的t_0点是弱可导的,那么,它在t_0点必是强连续的.

定义 4 设$x(s)$是定义在区间$[a,b]$上而在实Banach空间X内取值的向量值函数,对$[a,b]$作任意有限分割

$$\mathscr{D}: a=s_0<s_1<\cdots<s_{n-1}<s_n=b,$$

作和

$$S_{\mathscr{D}}=\sum_{k=0}^{n-1}x(s_k)(s_{k+1}-s_k).$$

如果$\{S_{\mathscr{D}}\}$强收敛于X中的一元y,那么,$x(s)$称为在$[a,b]$上Riemann可积,简称为(R)可积. 而y称为$x(s)$在$[a,b]$上的Riemann积分,表示为

$$y=\int_a^b x(s)ds.$$

定义 5 在测度空间$(\Omega,\mathscr{R},\mu)$中定义并在实Banach空间X

中取值的向量值函数 $x(s)$ 称为弱可测的，是指对任意 $f\in X^*$，$f[x(s)]$ 均是 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 上的数值可测函数.

在测度空间 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 中定义并在共轭空间 X^* 中取值的向量值函数 $f(s)$ 称为弱*可测的，是指对任意 $x\in X$，$[f(s)](x)$ 均是 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 上的数值可测函数.

定义 6 如果 $x(s)$ 为上面定义的向量值函数，我们称 $x(s)$ 是可数值阶梯函数，是指 Ω 可以表示成可数个互不相交的可测集 A_k $(k=1,2,\cdots)$ 的并，而在每个 A_k 上，$x(s)$ 取定常值 $x_k\in X(k=1,2,\cdots)$.

定义 7 上面 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 上的向量值函数 $x(s)$ 称为强可测的，是指存在一可数值阶梯函数列 $\{x_n(s)\}$，使得

$$x(s)=\lim_{n\to\infty}x_n(s)$$

在 Ω 上几乎处处成立.

易见，当 $X=\mathbf{R}^1$ 时，强可测、弱可测及实值函数可测的三概念是等价的.

定理 4 在测度空间 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 中，设 $x(s)$ 是强可测的，那么，(i) $x(s)$ 弱可测；(ii) 实值函数 $\|x(s)\|$ 可测.

定义 8 定义在测度空间 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 上而在实Banach空间 X 中取值的向量值函数 $x(s)$ 称为 Pettis 可积的，简称 (P) 可积，是指存在一元 $x_0\in X$，使对任意 $f\in X^*$，(L) 积分 $\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$ 均存在，且有

$$\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)=f(x_0).$$

这时，我们记

$$(P)\int_\Omega x(s)\mu(ds)=x_0 \text{ 或 }$$

$$\int_\Omega x(s)\mu(ds)=x_0,$$

并称元 x_0 是向量值函数 $x(s)$ 在 Ω 上的 Pettis 积分，简称 (P) 积分.

易见，(i) 当 $X=\mathbf{R}^1$ 时，(P) 积分与通常的 (L) 积分意义相同；(ii) 在 Ω 上，如果 $x(s)$ 是 (P) 可积的，那么它也必是弱可测的；(iii) 当 $x(s)$ 在 Ω 上的 (P) 积分为 x_0 时，x_0 是唯一确定的.

定理 5 如果 X 为自反空间，那么，只要对任意 $f\in X^*$，积分 $(L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$ 均存在，则 $x(s)$ 的 (P) 积分也存在.

定义 9 称 $x(s)$ 是 Bochner 可积的，简称 (B) 可积，是指(i) $x(s)=x^0(s)$ 是可数值阶梯函数，且 $\|x^0(s)\|$ 是 (L) 可积的，而这时定义其 Bochner 积分

$$(B)\int_\Omega x^0(s)\mu(ds)=\sum_{k=1}^\infty x_k\mu(A_k)\ (\text{强极限})$$

$\Big($这里已设 $\Omega=\sum\limits_{k=1}^\infty A_k$，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 为互不相交的可测集，且 $x^0(s)=x_k\in X,\ \forall s\in A_k(k=1,2,\cdots)\Big)$；(ii) $x(s)$ 是上面 Bochner 可积的可数值阶梯函数列 $\{x_n^0(s)\}$ 几乎处处收敛的强极限，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\|x(s)-x_n^0(s)\|\mu(ds)=0,$$

而这时定义其 Bochner 积分

$$(B)\int x(s)\mu(ds)=\lim_{n\to\infty}(B)\int x_n^0(s)\mu(ds).$$

定理 6 为了 $x(s)$ 是 (B) 可积的，必须且只须 $x(s)$ 是强可测的，并且 $\|x(s)\|$ 是 (L) 可积的.

定理 7 如果 $x(s)$ 是 (B) 可积的，那么它也是 (P) 可积的，且该两积分值是相同的.

关于向量值函数的上述定理的证明及更多的材料，可参看

[11]，[19]和[85].

1. 存在定义在[0,1]上而取值于空间 l^2 中的一个弱连续函数，它在[0,1]中的 Cantor 集上无处强连续.

显然，如果向量值函数 $x(t)$ 在 t_0 点强连续，那么它在 t_0 点亦必弱连续. 反之，则未必成立. Ryff[272]作出了一个定义在[0,1]上而取值于空间 l^2 中的弱连续函数，它在[0,1]中的 Cantor 集上无处强连续. 他的例子如下：

在区间[0,1]上定义实值连续函数列 $\{\psi_n(t)\}$ 如下：对 $C_{11}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，令 $\psi_1(t)$ 在 C_{11} 之外的值为 0，$\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)=1$，在[0,1]的其它处为线性，即对 $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}$，令

$$\psi_1(t)=1-6\left|t-\frac{1}{2}\right|.$$

对 $C_{21}=\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$，$C_{22}=\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$，令 $\psi_2(t)$ 在这些区间之外的值为 0，而 $\psi_2\left(\frac{1}{6}\right)=\psi_2\left(\frac{5}{6}\right)=1$，在[0,1]的其它处为线性. 对 $C_{31}=\left(\frac{1}{27},\ \frac{2}{27}\right)$，…，$C_{34}=\left(\frac{25}{27},\ \frac{26}{27}\right)$，令 $\psi_3(t)$ 在这些区间之外的值为 0，在每个 $C_{3k}(k=1,2,3,4)$ 的中点处 $\psi_3(t)$ 的值为 1，而在[0,1]的其它处为线性. 如此继续下去. 再令

$$\varphi_1(t)=\psi_1(t),$$
$$\varphi_2(t)=2^{-1}\psi_1(t)+\psi_2(t),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(t)=2^{-(n-1)}\psi_1(t)+\cdots+2^{-1}\psi_{n-1}(t)+\psi_n(t),$$

则每个 $\varphi_n(t)$ 在[0,1]上连续且 $0\leqslant\varphi_n(t)\leqslant1$. 又，在Cantor 集上 $\varphi_n(t)$ 的值为 0. 若 t_{kn} 是区间 C_{kn}（构造Cantor 集时删去的开区间）的中点，则有

$$\varphi_m(t_{kn})=0(m<k),$$

$$\varphi_m(t_{kn})=\frac{1}{2^{m-k}}(1\leqslant k\leqslant m).$$

令

$$x(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\cdots),0\leqslant t\leqslant 1,$$

由于 $\varphi_m(t)$的最大值只可能在区间 C_{kn} 的中点 t_{kn} 处取到，故若 τ 是这种点，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2=\frac{4}{3},$$

因而 $x\in l^2$，即 $x(t)$是定义在$[0,1]$上而取值于 l^2 的向量值函数。任取$f=(a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots)\in(l^2)^*=l^2$，则

$$f[x(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(t)$$

是 t 的连续函数，故$x(t)$在$[0,1]$上是弱连续的.

兹证$x(t)$在 Cantor 集的每一点 c 处都是强间断的. 事实上，在这种点上 $x(c)=0$. 现取一个中点序列 $\{t_\nu\}$，使 $t_\nu\to c(\nu\to\infty)$，则

$$\|x(t_\nu)-x(c)\|=\|x(t_\nu)\|=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

故$x(t)$在点 c 处强间断.

注 对任给 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，仿照上面的构造法，可作出一个定义在$[0,1]$上而取值于空间 l^2 中的弱连续，但在$[0,1]$中的某个测度为 $1-\varepsilon$ 的集上无处强连续的函数.

能否把函数$x(t)$的强间断点集(这是一个无处稠密集)代以第一纲的集？这是尚未解决的一个问题.

2. 弱有界变差而不强有界变差的向量值函数.

显然，强有界变差函数必是弱有界变差的；反之未必成立. 例

如，设X是定义在区间[0,1]上的一切有界复值函数$x(t)$按通常线性运算所成的线性空间．对$x\in X$，令

$$\|x\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

则X为Banach空间．其次，我们定义由区间[0,1]到X的向量值函数$\varphi(\xi)=x_\xi(t)$如下：

$$\varphi(\xi)=x_\xi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\xi,\\ 0, & \xi<t\leqslant 1,\\ 1, & \xi=1.\end{cases}$$

对于[0,1]中任取有限个两两不相交的区间(α_i,β_i) $(i=1,2,\cdots,n)$以及任一$f\in X^*$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|f\left\{\sum_{i=1}^{n}[\varphi(\beta_i)-\varphi(\alpha_i)]\right\}\right|\\ &\qquad\leqslant\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}[\varphi(\beta_i)-\varphi(\alpha_i)]\right\|\\ &\qquad\leqslant\|f\|.\end{aligned}$$

因此，$\varphi(\xi)$是[0,1]上的弱有界变差函数．

另一方面，对于任取的$\xi,\eta\in[0,1]$，当$\xi\neq\eta$时有

$$\|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)\|=1,$$

故$\varphi(\xi)$不是强有界变差的．

这个例子属于Гелъфанд[109]．

注 Dunford[90]指出，Banach空间中向量值函数的弱有界变差与有界变差是等价的．上述反例说明了Banach空间中向量值函数的弱有界变差与强有界变差并不等价．章照止[20]曾经证明，从区间[0,1]到Banach空间X的强、弱有界变差函数等价的充要条件是X为有限维的．吴从炘[4]指出，该命题对Fréchet空间并不成立．

3．存在定义在[0,1]上而取值于空间c中的向量值函数$x(t)=$

$\{\xi_n(t)\}$，使每个 $\xi_n(t)$满足 Lipschitz 条件，而 $x(t)$ 不是强有界变差函数.

设 $x(t)=\{\xi_n(t)\}\in c, 0\leqslant t\leqslant 1$. 容易证明，若每个函数 $\xi_n(t)$在$[0,1]$上都满足 Lipschitz 条件：

$$|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|\leqslant M_n|t'-t''|,\quad t',t''\in[0,1],$$

且数列$\{M_n\}$有界，则 $x(t)$必为强有界变差函数.

应当注意：如果在上述命题中，只设

$$|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|\leqslant M_n|t'-t''|, t',t''\in[0,1],$$

而不设$\{M_n\}$有界，则$x(t)$未必强有界变差. 例如，作一列函数$\xi_n(t)$如下：

$$\xi_1(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & t=1,\\ \text{线性}, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\xi_2(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4},\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ \text{线性}, & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\xi_3(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{8},\\ 1, & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1,\\ \text{线性}, & \frac{1}{8}\leqslant t\leqslant\frac{1}{4},\end{cases}$$

$$\cdots.$$

显然，每个 $\xi_n(t)$都是$[0,1]$上的递增函数，且

$$\xi(t)=\lim_{n\to\infty}\xi_n(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ 1, & 0<t\leqslant 1,\end{cases}$$

所以$x(t)=\{\xi_n(t)\}\in c$. 易见，每个函数ξ_n都满足Lipschitz条件：

$$|\xi_n(t')-\xi_n(t'')|\leqslant M_n|t'-t''|, t', t''\in[0,1],$$

但其中M_n的最小可用值为2^n, $n=1,2,\cdots$,所以$\{M_n\}$不是有界数列.

兹证$x(t)$不是强有界变差的. 为此，取$[0,1]$中的分点

$$0<\cdots<\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<1,$$

则

$$\left\|x(1)-x\left(\frac{1}{2}\right)\right\|+\left\|x\left(\frac{1}{2}\right)-x\left(\frac{1}{4}\right)\right\|+\left\|x\left(\frac{1}{4}\right)-x\left(\frac{1}{8}\right)\right\|+\cdots$$
$$=1+1+1+\cdots$$

所以$\bigvee_0^1(x)=+\infty$,即 $x(t)$不是强有界变差的.

4. 存在定义在 [0, 1] 上而取值于 c 中的向量值函数 $x(t)=\{\xi_n(t)\}$,使$\{\xi_n(t)\}$一致收敛于$\xi(t)$,且$\xi_n(t)$与$\xi(t)$均为有界变差函数,而$x(t)$却不是弱有界变差的.

容易证明,如果 $x(t)=\{\xi_n(t)\}\in c(0\leqslant t\leqslant 1)$是弱有界变差函数,$\xi(t)=\lim_{n\to\infty}\xi_n(t)$,那么$\xi(t)$,$\xi_n(t)(n=1,2,\cdots)$都是区间$[0,1]$上的普通实值有界变差函数.

应当注意，上述条件并不是弱有界变差函数的充分条件. 即使再添一个条件：$\{\xi_n(t)\}$一致收敛于$\xi(t)$,也不能保证$x(t)$是弱有界变差函数. 例如,在开区间$(0,1)$内任取数列$\{r_n\}$，使

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots<1.$$

作一列函数 $\xi_n(t)$如下：

$$\xi_1(t)=\begin{cases}1, & 0<t<r_1,\\ 0, & t=0 \text{ 或 } r_1\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\xi_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & r_n<t<r_{n+1}, n=2,4,6,8(\text{共 4 段}),\\ 0, & t\text{在}[0,1]\text{的其它部分};\end{cases}$$

$$\xi_3(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & r_n<t<r_{n+1}, n=10,12,\cdots,26(\text{共 9 段}),\\ 0, & t\text{在}[0,1]\text{的其它部分};\end{cases}$$

…

$$\xi_k(t)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & r_n<t<r_{n+1}, n=k_1,k_1+2,\cdots(\text{共 } k^2 \text{ 段}),\\ & \text{其中 } k_1=k(k-1)\frac{(2k-1)}{3}\\ 0, & t\text{在}[0,1]\text{的其它部分}.\end{cases}$$

易于看出，$\{\xi_k(t)\}$在$[0,1]$上一致收敛于$\xi(t)\equiv0$. 此时$\xi(t)$与每个$\xi_k(t)$都是有界变差函数：

$$\bigvee_0^1(\xi)=0,\quad \bigvee_0^1(\xi_k)=k^2\cdot2\cdot\frac{1}{k}=2k(k=1,2,\cdots).$$

但 $x(t)=\{\xi_n(t)\}\in c$ 不是弱有界变差的. 事实上，取 $c_0=0, c_n=\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots$, 则$\sum_n|c_n|<+\infty$，此时可得一个线性泛函 f:

$$f[x(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\xi_n(t), 0\leqslant t\leqslant1.$$

根据$\{\xi_n(t)\}$的作法不难看出，$f[x(t)]=\varphi(t)$ 是一个包含无穷段的阶梯函数，它的全变差是

$$\bigvee_0^1(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\bigvee_0^1(\xi_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot2n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

于是，$f[x(t)]=\varphi(t)$便不是普通的实值有界变差函数，从而 $x(t)$ 不是弱有界变差函数.

5. 存在定义在[0,1]上而取值于 c 中的弱有界变差的无处连续函数.

不难证明,如果 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$是强有界变差函数,那么 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上至多有可数个不连续点;也就是说,至多有可数个点 $t_k\in[0,1]$,使

$$\lim_{t\to t_k}\|x(t)-x(t_k)\|=0$$

不成立. 但若 $x(t)$ 仅为弱有界变差函数时,则上述命题未必成立. 例如,取[0,1]中的一切有理数$\{r_n\}$,作函数

$$\xi_n(t)=\begin{cases}1, & t=r_n,\\ 0, & t\neq r_n,\end{cases}$$

则 $x(t)=\{\xi_n(t)\}$是定义在[0,1]上而取值于空间 c 中的向量值函数,且$\bigvee_0^1(\xi_n)\leqslant 2$,因而 $x(t)$是弱有界变差函数.

兹证$x(t)$在[0,1]上无处连续. 事实上,任取 $t_0\in[0,1]$,则

$$\|x(t)-x(t_0)\|=\sup_n|\xi_n(t)-\xi_n(t_0)|,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

倘若 t_0 是有理点,$t_0=r_k$,则

$$\|x(t)-x(t_0)\|=|\xi_k(t)-\xi_k(r_k)|=1,t\in[0,1],\quad t\neq r_k,$$

故 $\lim\limits_{t\to t_0}\|x(t)-x(t_0)\|=0$ 不成立.

倘若 t_0是无理点,则有一列有理点$\{r_k\}$,$r_k\to t_0$,而

$$\begin{aligned}\|x(r_k)-x(t_0)\|&=\sup_n|\xi_n(r_k)-\xi_n(t_0)|\\&=|\xi_k(r_k)-\xi_k(t_0)|=1,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{t\to t_0}\|x(t)-x(t_0)\|=0$ 也不成立.

这样我们便证明了 $x(t)$在[0,1]上每一点都不连续.

6. Helly 选择原理对于取值于 c 中的强有界变差函数族并不成立.

作函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t=0\text{或}\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 1, & t=\frac{1}{4},\\ \text{线性}, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\text{或}\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

取

$$x^{(1)}(t)=(f(t),0,0,\cdots),$$
$$x^{(2)}(t)=(0,f(t),0,\cdots),$$
$$x^{(3)}(t)=(0,0,f(t),0,\cdots),$$
$$\cdots$$

则每个 $x^{(n)}(t)=(\xi_1^{(n)}(t),\xi_2^{(n)}(t),\cdots)\in c$，且

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k^{(n)}(t)=\xi^{(n)}(t)\equiv 0.$$

不难看出：$\|x^{(n)}(t)\|\leqslant 1$，$\bigvee_0^1(x^{(n)})=2$，$n=1,2,\cdots$. 但从$\{x^{(n)}(t)\}$中并不能找出任何子列，使它在$[0,1]$上每点收敛（极限倘若存在，则当然为 $x(t)=0$），其理由如下：任取 $t\in[0,1]$，则 $x^{(n)}(t)=(\xi_1^{(n)}(t),\xi_2^{(n)}(t),\cdots)$的每个坐标 $\xi_k^{(n)}(t)\to 0(n\to\infty;k=1,2,\cdots)$，但此种收敛性关于 k 并非一致的. 事实上，取 $t=\frac{1}{4}$，则

$$x^{(n)}(t)=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),$$

而 $x(t)=(0,\cdots,0,\cdots)$. 因此，不论取 n 多大，恒有 $k(=n)$，使

$$\left|\xi_k^{(n)}\left(\frac{1}{4}\right)-\xi_k\left(\frac{1}{4}\right)\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

这就证明了收敛性关于坐标的号码 k 并不是一致的. 对于$\{x^{(n)}(t)\}$的任何子列而言，也有这种情形，其证法相同. 所以在 $t=\frac{1}{4}$这点，任何子列$\{x^{(n_i)}(t)\}$都不能收敛（因为空间c中的收敛

性等价于对坐标的一致收敛性)．

例 3 至例 6 均是由张燮[21]作出的．

7．弱绝对连续而不绝对连续的向量值函数．

Dunford[60]指出，Banach 空间中向量值函数的弱有界变差与有界变差这两个概念是等价的．马绍芹[1]指出，向量值函数的弱绝对连续与绝对连续这两个概念并不等价．他构造了一个弱绝对连续而不绝对连续的向量值函数，构造细节可参看作者原文．

8．绝对连续而不强绝对连续的向量值函数．

易见，强绝对连续函数必是绝对连续的；绝对连续函数必是弱绝对连续的；其逆不真．Гельфанд[109]作出了一个绝对连续而不强绝对连续的向量值函数，构造细节可参看作者原文．

注 章照止[20]曾证明，从区间$[0,1]$到 Banach 空间X的强、弱有界变差函数等价的充要条件是X为有限维的．我们自然要问：对于强、弱绝对连续函数而言，相应的命题是否成立？

9．存在某个定义在$(0,2\pi)$上而取值于空间c内的向量值函数$x(t)$，使对任一$f\in c^*$，数值函数$f[x(t)]$处处可导，但$x(t)$却无处存在弱导数．

我们有下述命题：设$x(t)$是从区域$G\subset K$到 Banach 空间X内的向量值函数．如果$x(t)$在区域G内的一点t_0是弱可导的，那么对任一$f\in X^*$，相应的数值函数$f[x(t)]$必在t_0点可导，并且$\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}=f[x'(t_0)]$，其中$x'(t_0)$为$x(t)$在$t_0$点的弱导数；反之，当空间$X$还是弱序列完备时，逆命题也是成立的．

应当注意，当空间X不弱序列完备时，上述逆命题并不成立．例如，设$x(t)$为从$(0,2\pi)$到空间c内的向量值函数

$$x(t)=\left\{\frac{e^{int}}{n}\right\},$$

那么对任意$f\in c^*$，数值函数$f[x(t)]$在$(0,2\pi)$内处处可导，然而向量值函数$x(t)$在$(0,2\pi)$内却处处不存在弱导数．事实上，首先

由于 $c^*=l$，因而对任意 $f\in c^*$，就对应唯一的一个元$\{b_n\}\in l$，使得

$$f[x(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n e^{int}}{n},\quad t\in(0,2\pi),$$

于是，由 $\sum_{n=1}^{\infty} ib_n e^{int}$ 在区间$(0,2\pi)$内的一致(且绝对)收敛性，我们立即可以导出$\{f[x(t)]\}'_t=\sum_{n=1}^{\infty} ib_n e^{int}$ 在$(0,2\pi)$ 内处处存在. 但另一方面，如果假设 $x(t)$在某点 $t_0\in(0,2\pi)$上有弱导数 $x'(t_0)=\{\xi_n^0\}\in c$，那么，由上述命题可知，对任意 $f=\{b_n\}\in l$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ib_n e^{int_0}=\{f[x(t)]\}'_{t=t_0}$$

$$=f[x'(t_0)]=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\xi_n^0.$$

于是，当特别取一列泛函$\{f^{(k)}\}\subset c^*$，使其与

$$\{f_n^{(k)}\}=(0,\cdots,\underset{k\text{位}}{0,1},0,\cdots)\in l(k=1,2,\cdots)$$

对应时，由上面的关系式可导出$\{\xi_k^0\}=\{ie^{ikt_0}\}$. 但注意到$\lim\limits_{k\to\infty} ie^{ikt_0}$不存在，因而与$\{\xi_k^0\}\in c$的假设矛盾，此即说明 $x(t)$在$(0,2\pi)$内是处处没有弱导数的.

10. 弱可导而不强可导的向量值函数.

设有向量值函数 $x:(-1,1)\to l^2$，

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{e_n}{n}, & t=\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元. 于是

$$\frac{x(t)-x(0)}{t}=\begin{cases}e_n, & t=\frac{1}{n},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由于(弱)$\lim\limits_{t\to 0}\frac{(x(t)-x(0))}{t}=0$，因此 x 在 $t=0$ 处弱可导，且 $x'(0)=0$。但是$\left\|n\left(x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)\right)\right\|=1$，因而 x 在 $t=0$处不是强可导的。

注 其实，还可进一步作出处处弱可导而不强可导的向量值函数(参看[11]，pp.389—392)。

11．存在处处强连续而却无处弱可导的向量值函数．

可以证明，设$x(t)$为区域$G\subset K$ 内定义的向量值函数．那么，对于任意一点 $t_0\in G$，只要 $x(t)$是弱可导的，则其必在t_0点是强连续的；反之，未必成立．其实，可以作出一个处处强连续而却无处弱可导的向量值函数．例如，设 $x(t)$是由区间$[0,2\pi]$到 Banach 空间 l^2 的向量值函数：

$$x(t)=\left(\sin t,\frac{\sin 2t}{2^{\frac{(1+\sigma)}{2}}},\cdots,\frac{\sin nt}{n^{\frac{(1+\sigma)}{2}}},\cdots\right),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

其中 $0<\sigma<1$．那么 $x(t)$ 在$[0,2\pi]$上处处强连续且处处不弱可导．事实上，首先由

$$\|x(t)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nt}{n^{\frac{(1+\sigma)}{2}}}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}<+\infty$$

可知，上面定义的$x(t)$的确是l^2中的元．并且，任取$t_0\in[0,2\pi]$，只要$t_0+\Delta t\in[0,2\pi]$，就有

$$\|x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n(t_0+\Delta t)-\sin nt_0}{n^{\frac{(1+\sigma)}{2}}}\right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}}{n^{\frac{(1+\sigma)}{2}}}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^{\frac{(1+\sigma)}{2}}}\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}\right)\Delta t\to 0(\Delta t\to 0).$$

因而导出向量值函数$x(t)$在$[0,2\pi]$上任何一点均是强连续的. 其次，由于$(l^2)^*=l^2$，因此如果向量值函数$x(t)=\{x_n(t)\}$在t_0点有弱导数存在时，则其弱导数必为$\{x_n'(t_0)\}$.并且，由点列弱收敛极限的性质，我们还应有

$$\left\|\left\{x_n'(t_0)\right\}\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x'_n(t_0)|^2<+\infty. \tag{1}$$

然而，根据

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n'(t_0)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nt_0}{n^{\frac{(\sigma-1)}{2}}}\right)^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nt_0}{n^{\sigma-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\sigma}\cos^2 nt_0$$

便知$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n'(t_0)|^2=+\infty$，这与(1)式发生矛盾. 因此，向量值函数$x(t)$在$[0,2\pi]$上是无处弱可导的.

12. 存在无处强可导的强绝对连续函数.

James指出，从欧氏空间到一致凸Banach空间内的强有界变差函数必定是几乎处处强可导的.应当注意，对于不一致凸的Banach

空间，James定理并不成立．例如，设$x(t)$是由区间$[0,1]$到空间$L[0,1]$内的向量值函数：

$$[x(t)](\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi\leqslant t,\\ 0, & t<\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

那么，$x(t)$在$[0,1]$上是强绝对连续的，从而是强有界变差的，然而却处处不存在强导数．事实上，对任意$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$，由

$$\|[x(\beta)](\xi)-[x(\alpha)](\xi)\|=\int_{\alpha}^{\beta}d\xi=\beta-\alpha,$$

便知对于$[0,1]$内任意有限个互不相交的区间(α_k,β_k)，$k=1,2,\cdots,n$，必有

$$\sum_{k=1}^{n}\|x(\beta_k)-x(\alpha_k)\|=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k),$$

从而立即可以得出$x(t)$在$[0,1]$上是强绝对连续的．另一方面，由于

$$\frac{[x(t)](\xi)-[x(t_0)](\xi)}{t-t_0}$$

$$=\begin{cases}0 & ,0\leqslant\xi\leqslant\min(t_0,t),\\ \dfrac{1}{|t-t_0|} & ,\min(t_0,t)<\xi\leqslant\max(t_0,t),\\ 0 & ,\max(t_0,t)<\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

故知若$x(t)$在t_0点强可导，则上式当$t\to t_0$时必几乎处处收敛于$L[0,1]$中的元0．然而

$$\int_0^1\left|\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)(\xi)\right|d\xi=1\nrightarrow 0\ (t\to t_0),$$

因此，$x(t)$在任一点$t_0\in[0,1]$，它都不存在强导数．

13．存在强绝对连续函数，它并不几乎处处有弱导数．

可以证明，若向量值函数$x(t)$在t_0点是弱可导的，则其必在该点是强连续的，其逆不真．这里，我们举出一个强绝对连续函数，

它并不几乎处处有弱导数.

设$x(t)$是从区间$[0,1]$到Banach空间$L[0,1]$内的向量值函数：

$$[x(t)](\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi\leqslant t,\\ 0, & t<\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

则$x(t)$在$[0,1]$上是强绝对连续的(参看例12).

兹证$x(t)$在$[0,1]$上并不几乎处处有弱导数. 事实上，由于$(L[0,1])^*=L^\infty[0,1]$,以及关于空间$L[0,1]$上的有界线性泛函的一般形式，可知对任意$f=b(\xi)\in L^\infty[0,1]$,有

$$f[x(t)]=\int_0^1[x(t)](\xi)b(\xi)\,d\xi$$

$$=\int_0^t b(\xi)d\xi,\qquad t\in[0,1].$$

于是对几乎所有的$t\in[0,1]$,有

$$\frac{d}{dt}(f[x(t)])=b(t).\tag{1}$$

这样，如果$x(t)$在$[0,1]$上几乎处处有弱导数$y(t)\in L[0,1]$, $t\in[0,1]$,那么对任意$f=b(\xi)\in L^\infty[0,1]$,有

$$\frac{d}{dt}(f[x(t)])=f[y(t)]$$

$$=\int_0^1[y(t)](\xi)b(\xi)d\xi.\tag{2}$$

综合(1)与(2),便知对任意$f=b(\xi)\in L^\infty[0,1]$,关系式

$$\int_0^1[y(t)](\xi)b(\xi)d\xi=b(t)\tag{3}$$

对几乎所有的$t\in[0,1]$均成立. 对(3)式成立的任一点$t_0\in[0,1]$,当$y_0=y(t_0)$时(当然有$y_0\in L[0,1]$),有

$$\int_0^1 y_0(\xi)b(\xi)d\xi=b(t_0),\quad \forall b(\xi)\in L^\infty[0,1],$$

从而对任一$b(\xi)\in C[0,1]$，也应有

$$\int_0^1 y_0(\xi)b(\xi)d\xi=b(t_0). \qquad (4)$$

但是，上式显然是不对的．事实上，当在空间$C[0,1]$中取一元列

$$b_k(\xi)=\begin{cases}1+k(\xi-t_0),\xi\in[t_0-\frac{1}{k},t_0],\\ 1-k(\xi-t_0),\xi\in[t_0,t_0+\frac{1}{k}],\\ 0,\text{在}[0,1]\text{的其它点}(k=n_0,n_0+1,\cdots).\end{cases}$$

这里，n_0为使$[t_0-\frac{1}{n_0},t_0+\frac{1}{n_0}]\subset[0,1]$的某一正整数，由(4)式可得到

$$1\equiv b_k(t_0)=\int_0^1 y_0(\xi)b_k(\xi)d\xi$$

$$\leqslant\int_{t_0-\frac{1}{k}}^{t_0+\frac{1}{k}}|y_0(\xi)|d\xi \quad (k=n_0,n_0+1,\cdots).$$

显然，这与$|y_0(t)|$积分的绝对连续性矛盾．因此，$x(t)$在$[0,1]$上并不几乎处处有弱导数．

14．对每个无穷维Hilbert空间，可构造简单连续曲线，它的任意两个不相覆迭的弦互相直交．

若$x(t)$是单位闭区间到Hilbert空间H中的连续函数，则称$x(t)$是H中的连续曲线；若$x(t)$是一对一的函数，则称$x(t)$是简单曲线；称$x(b)-x(a)$为曲线$x(t)$的由区间$[a,b]$确定的弦；如果区间$[a,b]$与$[c,d]$至多有一个端点为公共点，则称弦$x(b)-x(a)$与$x(d)-x(c)$是不相覆迭的．

对于每个无穷维Hilbert空间，可以构造一条这样的简单连续曲线$x(t)$，它的任意两个不相覆迭的弦都是直交的．事实上，由于每个无穷维Hilbert空间有子空间与$L^2[0,1]$线性同胚，因而我们只要对空间$L^2[0,1]$来构造具有所需性质的简单连续曲线即可．

对$t\in[0,1]$，令

$$[x(t)](s)=\begin{cases}1, & 0\leqslant s\leqslant t,\\ 0, & t<s\leqslant 1.\end{cases}$$

若$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$，则

$$\|x(b)-x(a)\|^2=\int_0^1|[x(b)](s)-[x(a)](s)|^2ds$$
$$=\int_a^b ds=b-a,$$

故$x(t)$是连续的．易见，$x(t)$是简单曲线，且它的任意两个不相覆迭的弦都是直交的．

注 在上述构造法中，应用了每个无穷维Hilbert 空间都有子空间线性同胚于空间$L^2[0,1]$的断语．针对这一情况，Johnson[15]用初等的方法，构造了无穷维Hilbert空间中的简单连续曲线，它的任意两个不相覆迭的弦都是直交的．

15．弱可测而不强可测的向量值函数．

设E为区间$[0,1]$内的一个非(L)可测集，定义从$[0,1]$到空间$l^2([0,1])$内的向量值函数为

$$x(s)=(\cdots,x_\xi(s),\cdots),\quad 0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant\xi\leqslant 1,$$

其中$x_\xi(s)$为：(i)当$s\notin E$时$x_\xi(s)\equiv 0(0\leqslant\xi\leqslant 1)$；(ii)当$s\in E$时，若$\xi\neq s$，则$x_\xi(s)=0$；若$\xi=s$，则$x_\xi(s)=1$．于是，由于$x(s)$的每个坐标$x_{\xi_0}(s)$为

$$x_{\xi_0}(s)\equiv 0\ (0\leqslant s\leqslant 1),\text{当}\xi_0\notin E\text{时},$$

$$x_{\xi_0}(s)=\begin{cases}0, & s\neq\xi_0,\xi_0\in E,\\ 1, & s=\xi_0,\xi_0\in E,\end{cases}$$

因而$x_{\xi_0}(s)(0\leqslant\xi_0\leqslant 1)$为区间$[0,1]$上的$(L)$可测函数，也即$x(s)$是弱可测的．另一方面，由于

$$\|x(s)\|=(\sum_\xi|x_\xi(s)|^2)^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}0, & s\notin E,\\ 1, & s\in E,\end{cases}$$

即$\|x(s)\|$是集E的特征函数，因而实值函数$\|x(s)\|$非（L）可测。因此，由引言中的定理 4 知$x(s)$在$[0,1]$上不是强可测的。

16．弱*可测而不弱可测的向量值函数。

设N是正整数集，μ是定义在N的一切子集所组成的集族上的有限可加复值集函数，即$\mu(\varnothing)=0$；当$S,T\subset N$，$S\cap T=\varnothing$时

$$\mu(S\cup T)=\mu(S)+\mu(T).$$

又设μ满足条件：

$$\|\mu\|=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(e_i)|:N=\bigcup_i e_i,e_i\cap e_j=\varnothing,i\neq j\right\}$$
$$<+\infty. \tag{1}$$

令$bfa(N)$为一切具有上述性质的μ所组成的线性空间，则在范数(1)之下$bfa(N)$为Banach空间。

兹证$bfa(N)$是l^∞的共轭空间。事实上，对每一$f\in(l^\infty)^*$，令

$$\mu(S)=f(\chi_S),$$

其中χ_S是集S的特征函数，则当$S\cap T=\varnothing$时，$\chi_{S\cup T}=\chi_S+\chi_T$，从而$\mu$是有限可加的。又设$N=\bigcup_i e_i$，$e_i\cap e_j=\varnothing(i\neq j)$，定义$x=\{\xi_n\}\in l^\infty$为$\xi_n=\mathrm{sgn}\,\mu(e_k)$，当$n\in e_k$时，则$\|x\|=1$且

$$\sum|\mu(e_i)|=\sum\xi_{n_i}\mu(e_i)\text{（任取}n_i\in e_i\text{）}$$
$$=f(\sum\xi_{n_i}\chi_{e_i})\leqslant\|f\|$$

（因为$\|\sum\xi_{n_i}\chi_{e_i}\|\leqslant 1$）。故$\|\mu\|\leqslant\|f\|$，从而$\mu\in bfa(N)$。

再证$\varphi:f\to\mu$是$(l^\infty)^*$到$bfa(N)$上的一对一的等距映射。事实上，设E^∞是l^∞中仅有有限多个坐标不为0的数列所组成的线性子空间，对每一$\mu\in bfa(N)$，定义

$$f(x)=\sum\xi_i\mu(e_i),$$

这里$x=\{\xi_i\}\in E^\infty$，而每个e_i是这样的集，x在e_i上取值一次为ξ_i，

则当$\|x\|_{l^\infty}\leqslant 1$时，有

$$|f(x)|\leqslant\sum|\xi_i||\mu(e_i)|\leqslant\|\mu\|,$$

因而$f\in(E^\infty)^*$且$\|f\|\leqslant\|\mu\|$.由于E^∞在l^∞中是稠密的，故可把f的定义域扩张到l^∞上，扩张后的泛函仍记作f，则$f\in(l^\infty)^*$. 显然，$f(\chi_S)=\mu(S)$，即$\varphi(f)=\mu$且$\|f\|=\|\mu\|$. 故$(l^\infty)^*\to bfa(N)$是一个一对一的等距映射，因之，$bfa(N)$是l^∞的共轭空间，从而$f\in(l^\infty)^*$对应于$\mu\in bfa(N)$可表成

$$f(x)=\int_N xd\mu \quad (x\in l^\infty).$$

兹构造一个弱*可测而不弱可测的向量值函数，这里的构造法属于Sierpinski[284].

设$\{r_n\}$是区间$[0,1]$上的 Rademacher函数系，即对$t\in[0,1]$，令

$$r_n(t)=\mathrm{sgn}\sin 2^n\pi t.$$

设$f(t)$是从$[0,1]$到空间l^∞内的向量值函数：

$$f(t)=\left(\frac{(r_1(t)+1)}{2},\frac{(r_2(t)+1)}{2},\cdots\right),$$

μ是N的子集上的非零有限可加且取值为0或1的集函数，则下列断语成立：

(i)若$t=\sum_{n=1}^{\infty}c_n2^{-n}$是$[0,1]$中的任一非二进小数，则

$$1-t=\sum_{n=1}^{\infty}(1-c_n)2^{-n}$$

及

$$f(1-t)=(1,1,\cdots)-f(t).$$

(ii) 积分$\int_N fd\mu$是l^∞上的一个有界线性泛函.

(iii) 由于对每一有限集$E\subset N$，有$\mu(E)=0$，故知对$[0,1]$中的每一个二进有理数d，当$t,t+d\in[0,1]$时有

$$\int_N f(t)d\mu=\int_N f(t+d)d\mu.$$

令$\varphi(t)=\int_N f(t)d\mu$，则 $\varphi(t)$ 是 0 或 1，这是因为当 $\mu(\{n:r_n(t)+1=2\})=0$ 时，$\varphi(t)=0$；而当 $\mu(\{n:r_n(t)+1=2\})=1$时，$\varphi(t)=1$.

兹证 $\varphi(t)$在[0,1]上不是（L）可测的．事实上，由（iii）知φ有稠密的周期，因而φ关于[0,1]上的（L）测度应几乎处处取常值K．由(i)知对每一个非二进小数 $t\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\varphi(1-t)&=\int_N f(1-t)d\mu\\&=\int_N[(1,1,\cdots)-f(t)]d\mu\\&=\mu(N)-\int_N f(t)d\mu=1-\varphi(t).\end{aligned}$$

因此，$K=1-K$，$K=\frac{1}{2}$．但这与 φ 仅取值 0 或 1 发生矛盾．故φ不是（L）可测的，从而 f 不是弱可测的．

最后，不难看出 f 是弱*可测的．

17．存在由[0,1]到空间 c 内的向量值函数$x(s)$，使对每一$f\in c^*$，$f[x(s)]$均是 Lebesgue 可积的，而$x(s)$并不 Pettis 可积．

可以证明，如果 $x(s)$是定义在测度空间($\Omega,\mathscr{R},\mu$)上而在实自反 Banach 空间X中取值的向量值函数，那么，只要对任意 $f\in X^*$，积分$(L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$均存在，则 $x(s)$的（P）积分也存在（参看[11]，pp.410—411)．当X非自反时，一般仅从任意 $f\in X^*$，$(L)\int_\Omega f[x(s)]\mu(ds)$的存在，是保证不了 $x(s)$的（P）积分存在的．例如，设 $x(s)$ 为定义在区间[0,1] 上而取值于空间 c 内的向量值函数：$x(s)=\{x_n(s)\}$，$0\leqslant s\leqslant 1$，其中

$$x_1(s)\equiv 0,x_{2n}(s)\equiv 0,$$

$$x_{2n+1}(s)=\begin{cases}2n, & 0<s\leqslant\frac{1}{2n},\\ 0, & s\text{ 为}[0,1]\text{的其它值。}\end{cases}$$

由 $x(s)$ 的定义不难看出 $x(s)$ 的形式为

当 $\frac{1}{2}<s\leqslant 1$ 时，$x(s)=(0,0,\cdots)$；

当 $\frac{1}{4}<s\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$x(s)=(0,0,2,0,\cdots)$；

当 $\frac{1}{6}<s\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$x(s)=(0,0,2,0,4,0,\cdots)$；

当 $\frac{1}{2n}<s\leqslant\frac{1}{2(n-1)}$ 时，

$$x(s)=(0,0,2,0,4,0,\cdots,2(n-1),0,\cdots);$$

……

其中 $2(n-1)$ 在第 $2n-1$ 个位置上. 于是，对任意 $f=\{b_n\}\in c^*=l$，有

$$\int_0^1 f[x(s)]ds=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n x_n(s)\right]ds$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}}+\cdots+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2(n-1)}}+\cdots$$

$$=0+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot b_3+\frac{1}{12}(2b_3+4b_5)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2n(n-1)}(2b_3+4b_5+\cdots$$

$$+2(n-1)b_{2n-1})+\cdots.$$

因 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{(k-1)}$，故

$$\int_0^1 f[x(s)]ds=b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}+\cdots,$$

即对任意 $f\in c^*=l$，数值函数 $f[x(s)]$在$[0,1]$上均是(L)可积的. 但另一方面，由于$c^{**}=l^\infty$中的元$x_0=(0,0,1,0,1,0,1,\cdots)\notin c$，因而 $x(s)$在$[0,1]$上不是(P)可积的.

18. Pettis 可积而不强可测的向量值函数.

容易证明，(P)可积的向量值函数必是弱可测的. 但是，一般说来它未必是强可测的. 例如，设 $x(s)$是例 15 中的弱可测而不强可测的向量值函数. 因对任意$f=\{f_\xi\}\in(l^2([0,1]))^*$，必有$f=\{b_{\xi_n}\}\in l^2$，故

$$f[x(s)]=\sum_{n=1}^{\infty}b_{\xi_n}x_{\xi_n}(s),$$

且由 $x_\xi(s)$的假设还知 $f[x(s)]$ 为除可数个点外均取 0 值的函数，因而对任意 $f\in(l^2([0,1]))^*$，有

$$\int_0^1 f[x(s)]ds=f(0),$$

即 $x(s)$的(P)积分为 0.

19. Pettis 可积而不 Bochner 可积的向量值函数.

可以证明，若 $x(s)$是(B)可积的，则其亦必是(P)可积的，且两积分值是相同的. 应当注意，这个命题之逆不真.

第一例　例 18 中的向量值函数是(P)可积而不强可测的，于是由引言中的定理 6，可知该函数是(P)可积而不(B)可积的.

第二例　设 $x(t)$为从$[0,+\infty)$到空间 c 内的向量值函数：

$$x(t)=\left(0,\cdots,0,\frac{1}{n},0,\cdots\right),\quad t\in[n-1,n),$$
$$n=1,2,\cdots.$$

由于对任意 $f=\{f_n\}\in c^*=l$，均有

$$\int_0^{+\infty}f[x(t)]\,dt=\int_0^1+\int_1^2+\cdots+\int_{n-1}^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n}<+\infty,$$

即有 $\int_0^{+\infty}f[x(t)]dt=f(x_0)$，其中 $x_0=\left\{\frac{1}{n}\right\}\in c$。因此，$x(t)$ 是 (P) 可积的，且

$$(P)\int_0^{+\infty}x(t)dt=x_0=\left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

但另一方面，我们显然有

$$\int_0^{+\infty}\|x(t)\|dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

因而 $\|x(t)\|$ 在 $[0,+\infty)$ 上不是 (L) 可积的，由引言中的定理 6，便知 $x(t)$ 不是 (B) 可积的.

23. Radon-Nikodym 定理不成立的有界变差且关于 μ 绝对连续的向量值测度.

设 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，X 是Banach 空间. $F:\mathscr{R}\to X$ 是向量值测度. 对 $E\in\mathscr{R}$，π 是把 E 分解为 $\mathscr{R}$ 中互不相交的有限个元的分割，规定

$$|F|(E)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\|,$$

称 $|F|$ 为 F 的变差. 若 $|F|(\Omega)<+\infty$，则称 F 是具有有界变差的测度.

设 $F:\mathscr{R}\to X$ 是向量值测度，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\delta$ 时，$\|F(E)\|<\varepsilon$，则称 F 关于 μ 是绝对连续的.

在测度论中有基本的 Radon-Rikodym 定理：设 $(\Omega,\mathscr{R},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，ν 是 $\mathscr{R}$ 上的 σ 有限广义测度，ν 关于 μ 绝对连续，则存在 $\mathscr{R}$ 上有限值可测函数 f，使得对每个 $E\in\mathscr{R}$，有

$$\nu(E)=\int_E fd\mu.$$

自然要问，对向量值测度而言，相应的结果是否成立？即设F：$\mathscr{R}\to X$是具有有界变差的向量值测度，且关于μ绝对连续，是否存在$f\in B(\Omega,X,\mu)$(Bochner可积函数全体)，使得对每个$E\in\mathscr{R}$，有

$$F(E)=\int_E f d\mu.$$

下面的例子说明，这个结果并非普遍成立.

设$\Omega=[0,1]$，$\mathscr{R}$为$[0,1]$上Lebesgue可测集全体，m为Lebesgue测度. 规定映射$F:\mathscr{R}\to c_0$为

$$F(E)=\left\{\int_E \sin 2^n\pi t dm(t)\right\}.$$

易见$F(E)\in c_0$，且

$$\|F(E)\|=\sup_n\left|\int_E \sin 2^n \pi t dm(t)\right|\leqslant m(E).$$

因此，F是具有有界变差的c_0值测度，且关于m绝对连续. 如果存在Bochner可积函数$f:\Omega\to c_0$，使得$F(E)=\int_E f(t)dm(t)$，设$f(t)=\{f_n(t)\}$，则对$E\in\mathscr{R}$，$F(E)$的第n个坐标为

$$(F(E))_n=\int_E f_n(t)dm(t),$$

故对几乎所有的t，$f_n(t)=\sin 2^n\pi t$. 但如记$E_n=\left\{t:|\sin 2^n\pi t|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，则对一切$n$，$m(E_n)=\frac{1}{2}$，从而

$$m(\overline{\lim} E_n)\geqslant\overline{\lim}m(E_n)=\frac{1}{2}.$$

所以$m(\{t:f(t)\in c_0\})\leqslant\frac{1}{2}$，即$f$并非几乎处处为$c_0$值的，此为矛盾. 这就说明了Radon-Nikodym定理关于F并不成立.

注 上述例子说明对向量值测度而言，需要讨论 Radon-Nikodym 定理成立的条件，因此，引入下列概念.

一个Banach空间X称为关于$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$具有Radon-Nikodym性质，其中$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$是$\sigma$有限测度空间，如果对每个有界变差、$\mu$绝对连续的向量值测度$F: \mathscr{R}\to X$，存在$f\in B(\Omega, X, \mu)$，使得对一切$E\in\mathscr{R}$，有

$$F(E)=\int_E f d\mu.$$

一个 Banach 空间X称为具有Radon-Nikodym 性质，简称具有 RNP，如果X关于每个σ有限测度空间$(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$具有 Radon-Nikodym 性质.

有关 RNP 的研究早在 1933 年就开始了. 当时，Bochner 引入了向量值函数的（B）积分. 很自然地，他试图把实分析中的 Radon-Nikodym 定理推广到向量值测度的情况. 但是，Bochner 发现这并不总是可以的，例如对空间$L^\infty[0, 1]$，相应的 Radon-Nikodym 定理就不成立. 那么，对什么样的Banach空间，Radon-Nikodym 定理仍然成立呢？1935 年 Birkhoff 证明了，Hilbert 空间具有 RNP. 1936 年 Clarkson 引入了一致凸空间的概念，并且证明了，一致凸 Banach 空间具有RNP. 1936 年，Dunford 和 Morse 证明了，具有有界完全基的 Banach 空间具有 RNP. 随后，在 1938 年 Гельфунд又证明了，自反 Banach 空间具有 RNP. 于是，这个问题引起了更多数学家的兴趣，并取得了大量的成果.

目前，RNP 研究基本上有三个方面：RNP 的分析方向研究；RNP 的算子方向研究；RNP的几何方向研究. 有关这方面的论述可参看[16].

21. Riesz 表示定理不成立的有界线性算子.

对数值函数有熟知的 Riesz 表示定理. 自然要问：可否推广到取值于 Banach 空间的有界线性算子，即设X为 Banach 空间，

$T: L(\Omega,\mu)\to X$ 是有界线性算子，是否存在 $f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，使得

$$Tg=\int_\Omega fg\,d\mu,\quad \forall g\in L(\Omega,\mu),$$

这里 $L^\infty(\Omega, X, \mu)$ 表示 $\{f: f$ 是 (B) 可积的，$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X<+\infty\}$，对 $f\in L^\infty(\Omega,X,\mu)$，记 $\|f\|=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X$.

这个问题的答案是否定的．例如，取 $([0,1],\mathscr{R},m)$ 同例 20，定义 $T: L[0,1]\to c_0$ 为

$$Tg=\left\{\int_0^1 g(t)\sin 2^n\pi t\,dm(t)\right\}.$$

T 显然是线性的，且

$$\|Tg\|=\sup_n\left|\int_0^1 g(t)\sin 2^n\pi t\,dm(t)\right|$$

$$\leqslant\int_0^1|g(t)|\,dm(t)=\|g\|_1,$$

即 T 有界．若存在 $f\in L^\infty([0,1],c_0,m)$，使得

$$Tg=\int_0^1 f(t)g(t)\,dm(t),\quad \forall g\in L[0,1],$$

考察例 20 中的向量值测度

$$F(E)=\left\{\int_E \sin 2^n\pi t\,dm(t)\right\},$$

则有

$$F(E)=T(\chi_E)=\int_E f(t)\,dm(t).$$

由例 20 可知这是不可能的，故 Riesz 表示定理对于 T 并不成立．

注　上述例子说明对取值于 Banach 空间的有界线性算子，需要讨论 Riesz 表示定理成立的条件．为此，引入下述概念：

设 T 是 $L(\Omega,\mu)\to X$ 的有界线性算子，若存在 $f\in L^\infty(\Omega, X, \mu)$，使得

$$Tg=\int_{\Omega}fg\,d\mu,\forall g\in L(\Omega,\mu),$$

则称T是具有Riesz表示的，简称T是可表示的. 可以证明，Radon-Nikodym性质与一族算子的可表示性是等价的.

第十章　度量线性空间

引言

设(X,d)是一个度量空间，X又是数域$\mathbf{K}$上的线性空间．如果X中的线性运算是连续的，就是说：(i) 加法运算是连续的，如果$\{x_n\},\{y_n\}\subset X$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，那么$x_n+y_n\to x+y$；(ii) 数乘运算是连续的，如果$\{\alpha_n\}\subset K$，$\alpha_n\to\alpha$，$\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x$，那么$\alpha_n x_n\to\alpha x$．这时我们就称(X,d)是一个度量线性空间．

如果(X,d)是完备的度量线性空间，就称它为Fréchet 空间，有些书上称完备的局部凸的度量线性空间为Fréchet 空间．

显然，赋范线性空间是一个度量线性空间．又，如果(X,d)是一个度量线性空间，在X中按距离d引入拓扑τ，那么(X,τ)成为拓扑线性空间．

设A是度量线性空间X的子集，若对零的任何邻域U，有$\lambda>0$，使$A\subset\lambda U$，则称A为有界的；若A的直径

$\operatorname{diam}A=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}<+\infty$，则称$A$为度量有界的．

在赋范线性空间中，度量有界与有界是一致的．但在度量线性空间中，有界集必是度量有界的，其逆不真．

有关度量线性空间的更多的材料可参看[327]．

1．存在某个度量线性空间中度量有界而不有界的集合．

令$S=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots):\xi_i\in\mathbf{R}^1,i=1,2,\cdots\}$，并在$S$上定义通常的线性运算．对$x=\{\xi_i\}$，$y=\{\eta_i\}\in S$，令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

则S为一度量线性空间．

显然，$\operatorname{diam}S\leqslant 2$，从而整个空间$S$是度量有界的．另一方

面，容易证明拓扑线性空间中集A有界的充要条件是对任何$\{x_n\}\subset A$，$\lambda_n\to 0(n\to\infty)$，$\lambda_n$为实数，皆有$\lambda_n x_n\to 0(n\to\infty)$。令$x_n=na$，$a=(1,1,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{x_n}{n},0\right)=d(a,0)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

因此，S不是有界的.

注 设X为度量线性空间．若集$A\subset X$是有界的，则其亦必是度量有界的．上述反例说明了这个命题之逆不真．

2．存在某个度量线性空间中的有界集，它的凸包不是有界的．

在局部凸拓扑线性空间中，有界集的凸包一定是有界的．在一般的拓扑线性空间中，甚至在度量线性空间中，有界集的凸包不必是有界的．例如，设$l^p(0<p<1)$为满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<+\infty$$

的数列$x=\{\xi_n\}$所成之集，对$x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}\in l^p$，令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p,$$

则l^p按通常的线性运算为一度量线性空间．

为构造所需的反例，我们先证明下面的

命题 为使集$A\subset l^p(0<p<1)$是有界的，当且仅当它在l^p中是度量有界的．

证 设$A\subset l^p$是有界的，则对某个正整数n，有$A\subset nB(0,1)$，其中$B(0,1)$代表l^p中以0为球心，1为半径的开球．由于

$$nB(0,1)\subset B(0,n),$$

因而A是度量有界的．

反之，若A度量有界，则存在$r>0$，使$A\subset B(0,r)$．设G是l^p中零点的一个邻域，则对某个$\varepsilon>0$，有$B(0,\varepsilon)\subset G$．于是

$$A\subset B(0,r)=r^{\frac{1}{p}}B(0,1)$$

$$\cdots\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}B(0,\varepsilon)\subset\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}G,$$

即 A 是有界的．证毕．

我们用 $B[0,1]$ 代表 l^p 中以0为球心，1为半径的闭球，则 $B[0,1]$ 是度量有界的，据上述命题，它也是有界的．现取 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\in B[0,1]$，并令

$$a_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}e_k}{n}=\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\right),$$

则 a_n 属于 $B[0,1]$ 的凸包．但

$$d(0,a_n)=n^{1-p}\to+\infty(n\to\infty),$$

所以 $B[0,1]$ 的凸包不是度量有界的，据此命题，它也不是有界的．

3．存在某个度量线性空间上的连续线性映射，它把零点的每个邻域映成无界集．

容易证明，设 f 是由拓扑线性空间 X 到拓扑线性空间 Y 内的线性映射，如果它把 X 中零点的某个邻域映成 Y 中的有界集，那么 f 必定是连续映射（参看[326]，p. 186）．应当注意，这个命题之逆并不成立．例如，设 S 是例1中的度量线性空间，I 是 S 到 S 上的恒等映射，则 I 是连续线性映射．由于度量线性空间 S 中不存在有界的邻域（参看[326]，p. 181），因而 I 不能把 S 中的某个邻域映成有界集．

注　可以证明，若 Y 中存在有界的零点的邻域 U，又 f 是 X 到 Y 内的连续线性映射，则 f 把 X 中零点的邻域 $f^{-1}(U)$ 映成 Y 中的有界集，即此时逆命题成立．

4．不可赋范化的度量线性空间．

设 X 为赋范线性空间，则由范数决定的距离 $\|x-y\|=d(x,y)$

$(x, y \in X)$必然满足等式：

$$d(x,y)=d(x-y,0),$$
$$d(\alpha x,0)=|\alpha|d(x,0). \tag{1}$$

容易看出，在一个度量线性空间中，距离由范数决定的充要条件就是 $d(x,y)$ 适合(1)。当距离适合条件(1)时，$\|x\|=d(x,0)$ 就是范数。因此，(1) 也是度量线性空间成为赋范线性空间的充要条件。

兹证度量线性空间 S 的距离不能由任何范数决定，即空间 S 是不可赋范化的。事实上，假如在 S 上有一范数 $\|\cdot\|$，使得 $d(x,y)=\|x-y\|$，那么应有

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|},$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in S$。但对于数 $\alpha\neq 0$ 而言，等式 $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(x\in S)$ 并不成立，故 S 的距离不能由任何范数来决定。

5．级数的无条件收敛与绝对收敛等价的无穷维 Fréchet 空间。

Dvoretzky 和 Rogers[63] 于 1950 年指出，每个无穷维 Banach 空间中存在无条件收敛而不绝对收敛的级数。于是便产生问题：对于无穷维 Fréchet 空间而言，这一命题是否成立？下面的例子将说明这个问题的答案是否定的。

设 $D[0,1]$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的所有实值函数按通常的线性运算所成的线性空间，其中诸函数有任意阶的导数。令

$$\|x\|_i=\max_{0\leq t\leq 1}|x^{(i)}(t)|,\ i=0,1,2,\ \cdots,\ 此地\ x^{(0)}(t)=x(t),$$

$x^{(i)}(t)=\dfrac{d^i x(t)}{dt^i}$，$i=1,2,\cdots$。又令

$$d(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\|x-y\|_i}{1+\|x-y\|_i}\ (x,y\in D[0,1]),$$

则 $D[0,1]$ 是一个 Fréchet 空间。

由于 Fréchet 空间中绝对收敛的级数必定是无条件收敛的，因而我们只要证明 $D[0,1]$ 中的无条件收敛级数都是绝对收敛的即可.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 $D[0,1]$ 内任一无条件收敛的级数，固定标号 i，并且选择点 t_n，使得

$$|x_n^{(i)}(t_n)| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n^{(i)}(t)|, i=1,2,\cdots,$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n^{(i)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(t_n)|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(t_n)-x_n^{(i)}(0)| + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(0)|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{t_n} x_n^{(i+1)}(t)dt\right| + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(0)|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 |x_n^{(i+1)}(t)|dt + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(0)|. \tag{1}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为无条件收敛的充要条件是每个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n x_n$（其中 $\eta_n=0$ 或 1）在 $D[0,1]$ 中都收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n x_n$ 在 $D[0,1]$ 中收敛等价于对每个 i，$\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n x_n^{(i)}(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 |x_n^{(i+1)}(t)|dt < +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(i)}(0)|<+\infty.$$

于是，由不等式(1)得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_i=\sum_{n=1}^{\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n^{(i)}(t)|<+\infty.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{(i)}(t)\ (i=1,2,\cdots)$ 在空间 $C[0,1]$ 内绝对收敛.

再由空间 $D[0,1]$ 中距离的定义可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 在 $D[0,1]$ 中绝对收敛.

6. 不能赋予完备的平移不变距离的线性空间.

第二章例 13 指出，并非每个线性空间都可以赋予完备范数而使之成为 Banach 空间.那么，可否在每个线性空间上赋予完备的平移不变的距离，即 $d(x+z,y+z)=d(x,y)$，而使之成为 Fréchet 空间呢？这个问题的答案也是否定的. 例如，在线性空间 E^∞ 上就不能赋予完备的平移不变的距离. 事实上，假如在 E^∞ 上能赋予完备的平移不变的距离 d，则 (E^∞,d) 为 Fréchet 空间，从而它是一个第二纲的集.另一方面，$\{e_n\}$ 是 E^∞ 的一个 Hamel 基，其中 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$，令

$$E_n=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\},$$

则 E_n 是 (E^∞,d) 的一个闭的真子空间，且

$$E^\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

类似于第二章例 13 的方法，可证每个 E_n 在 (E^∞,d) 内都是无处稠密的，从而 (E^∞,d) 是一个第一纲的集，这样就导致预期的矛盾.

7. $x_n \to 0$并不蕴涵$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \to 0$的度量线性空间.

容易证明,如果X是赋范线性空间,$\{x_n\} \subset X$且$x_n \to 0$ $(n \to \infty)$,那么必有$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \to 0 (n \to \infty)$. 应当注意, 对于一般的度量线性空间而言,这一命题不再成立. 例如,考虑度量线性空间$l^p(0<p<1)$,并取$\alpha>0$使$0<p+\alpha p<1$. 令

$$x_n = \left(0, \cdots, 0, \frac{1}{n^\alpha}, 0, \cdots\right),$$

则$x_n \in l^p$且$x_n \to 0$,即$d(x_n, 0) = \frac{1}{n^{\alpha p}} \to 0 (n \to \infty)$. 但是,我们有

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n \cdot 2^\alpha}, \cdots, \frac{1}{n \cdot n^\alpha}, 0, 0, \cdots\right),$$

因此

$$d\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p 2^{\alpha p}} + \cdots + \frac{1}{n^p n^{\alpha p}}$$

$$\geqslant \frac{n}{n^p n^{\alpha p}} = n^{1-(p+\alpha p)} \to +\infty (n \to \infty).$$

注 倘若X是局部凸空间, $x_n \in X$且$x_n \to 0$, 那么必有$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \to 0$(参看[326]). 由此可知, 度量线性空间$l^p(0<p<1)$不是局部凸的.

8. 不存在非零连续线性泛函的度量线性空间.

我们先证明下面的

定理 设X是度量线性空间, 如果在X上存在非零连续线性泛函f,那么

(i) 在X中必有零点的一个凸邻域G,使 $G\neq X$.

(ii) $G+G+\cdots+G\neq X$(任意有限项).

证 令$G=\{x:x\in X,|f(x)|<1\}$. 易见,G是零点的一个凸邻域. 兹证$G\neq X$. 反设$G=X$,则对任意$x\in X$,都有$|f(x)|<1$. 取$x_0\in X$,使$|f(x_0)|=\varepsilon>0$,并取正整数n使$\varepsilon n>1$. 由于$nx_0\in X$,故$|f(x_0 n)|<1$. 但另一方面,$|f(x_0 n)|=n\varepsilon>1$,此为矛盾. 因此,不存在$x_0\in X$使$|f(x_0)|>0$,从而$f=0$,这与$f$是$X$上的非零连续线性泛函发生矛盾,所以$G\neq X$.

其次,对任意正整数n,由于G是凸集,因而

$$G+G+\cdots+G=nG(n\text{ 项}).$$

因X是线性空间,故对任意$x\in X$,有$y=nx\in X$,从而$x=\frac{1}{n}y\in\frac{1}{n}X$,即$X\subset\frac{1}{n}X$,同理可证,$\frac{1}{n}X\subset X$;故$X=\frac{1}{n}X$. 前面已证,$G\neq X$,因此$G\neq\frac{1}{n}X$,$nG\neq X$. 证毕.

现设X是定义在区间$[0,1]$上的实值函数$x(t)$的全体,其中每个$x(t)$在$[0,1]$上只有有限个不连续点. 在X上定义通常的线性运算,并对$x,y\in X$,令

$$d(x,y)=\int_0^1\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt,$$

这里的积分是(R)积分. 则X为一度量线性空间. 兹证X上不存在非零连续线性泛函. 反设X上存在非零连续线性泛函,则据上述定理,有

(i) 在X中存在零点的一个凸邻域G,使$G\neq X$.

(ii) $X\neq G+G+\cdots+G$(任意有限项). 于是,存在$r>0$,使得$B(0,r)\subset G$,这里$B(0,r)$代表以0为球心,r为半径的开球. 取正整数$n>\frac{1}{r}$以及$x\in X$,并把区间$[0,1]$分成n个等长的小区间

$I_1,\cdots,I_n$,在$[0,1]$上如下定义n个函数:

$$x_k(t)=\begin{cases}x(t), & t\in I_k,\\ 0, & t\in[0,1]\setminus I_k,\end{cases}$$

其中$k=1,2,\cdots,n$。易见,$x_k\in X$,且

$$d(x_k,0)=\int_{I_k}\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt\leqslant\int_{I_k}dt=\frac{1}{n}<r,$$

因此,$x_k\in B(0,r)\subset G$. 由于$x(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)$,故

$$x\in G+\cdots+G(n\text{ 项}).$$

而$x\in X$是任取的,所以$X=G+\cdots+G(n$项$)$,这与前面所证的定理发生矛盾. 因此, X上不存在非零连续线性泛函.

9. 共轭空间是零维的无穷维度量线性空间.

如所周知,无穷维赋范线性空间的共轭空间也是无穷维的. 然而,无穷维度量线性空间的共轭空间可以是零维的.

第一例 设X为例8中的度量线性空间,则$X^*=\{0\}$.

第二例 设$L^p[0,1](0<p<1)$是定义在区间$[0,1]$上满足条件$\int_0^1|x(t)|^p dt<+\infty$的函数$x(t)$所成之集,对$x,y\in L^p[0,1]$,令

$$d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|^p dt,$$

则$L^p[0,1]$按通常线性运算为一度量线性空间. Day[77]指出,空间$L^p[0,1](0<p<1)$的共轭空间是零维的. 我们先证明下面的

定理 任给(L)可测集$E\subset[0,1]$且$mE>0$及实数$r(0<r<2)$,存在函数$h(t)\in L^r[0,1]\setminus L^2[0,1]$,使当$t\notin E$时$h(t)=0$.

证 我们把E分解成两两不相交的子集列$\{E_n\}$的并集,使得

$$mE_n=2^{-n}mE,\quad n=1,2,\cdots.$$

在区间$[0,1]$上定义函数$h(t)$如下:

$$h(t)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & t\in E_n,\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

则

$$\int_0^1 |h(t)|^r dt = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{\frac{n}{2}})^r mE_n$$

$$= mE\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}(2^{\frac{n}{2}})^r < +\infty,$$

而

$$\int_0^1 |h(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{\frac{n}{2}})^2 mE_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} mE = +\infty,$$

所以 $h\in L^r[0,1]\setminus L^2[0,1]$，证毕.

因为 $0<p<1$，所以 $L^2[0,1]\subset L^p[0,1]$. 由此可知，若 $a_n\in L^2[0,1]$且

$$\int_0^1 |a_n(t)|^2 dt \to 0(n\to\infty),$$

则也有

$$\int_0^1 |a_n(t)|^p dt \to 0(n\to\infty).$$

兹证空间 $L^p[0,1]$上不存在非零连续线性泛函. 反设 $L^p[0,1]$上存在非零连续线性泛函 f，那么由 $L^2[0,1]\subset L^p[0,1]$可知，f 也是空间 $L^2[0,1]$上的连续线性泛函. 于是由 $L^2[0,1]$上连续线性泛函的一般形式可知，存在 $y(t)\in L^2[0,1]$，使对一切 $a(t)\in L^2[0,1]$，都有

$$f(a) = \int_0^1 a(t)y(t)dt.$$

因为 f 是非零泛函，所以 $y(t)$ 不能几乎处处为零，从而存在正数 c 及$[0,1]$上具有正测度的子集 E，使得

$$|y(t)|\geq c \quad (t\in E).$$

再由上述定理，存在函数 $h\in L^{2p}[0,1]\setminus L^2[0,1]$，使当 $t\notin E$ 时 $h(t)=0$。令

$$g(t)=h^2(t)\operatorname{sgn}\{y(t)h^2(t)\},$$

则 $g\in L^p[0,1]$。再令 $E_n=\{t:|g(t)|\leqslant n\},n=1,2,\cdots$，并令

$$g_n(t)=\begin{cases}g(t), & t\in E_n,\\ 0, & t\notin E_n.\end{cases}$$

则 $m(E\setminus E_n)\to 0(n\to\infty)$，故由积分的绝对连续性，得到

$$\int_0^1|g_n(t)-g(t)|^p dt=\int_{E\setminus E_n}|g(t)|^p dt\to 0\,(n\to\infty).$$

另一方面，g_n 在$[0,1]$上有界，故 $g_n\in L^2[0,1]$，而 $h\notin L^2[0,1]$，所以

$$\begin{aligned}f(g_n)&=\int_0^1 g_n(t)y(t)dt=\int_{E_n}g(t)y(t)dt\\&=\int_{E_n}|y(t)h^2(t)|dt\\&\geqslant c\int_{E_n}|h(t)|^2\,dt\to+\infty(n\to\infty).\end{aligned}$$

这与 f 的连续性发生矛盾，因此，空间 $L^p[0,1](0<p<1)$上不存在非零连续线性泛函。

10．存在某个非局部凸的度量线性空间，其上存在非零连续线性泛函．

可以证明，局部凸的拓扑线性空间上，特别是赋范线性空间上必定存在非零连续线性泛函．由例 8 与例 9 可知，非局部凸的拓扑线性空间上未必存在非零连续线性泛函．但应注意，也确实存在非局部凸的度量线性空间，其上却存在着非零连续线性泛函．例如，度量线性空间 $l^p(0<p<1)$不是局部凸的(参看例 7 的注)．兹证空间 $l^p(0<p<1)$ 上存在非零连续线性泛函．事实上，任取 $x=\{\xi_n\}\in l^p$，令

$$f(x)=\xi_1.$$

易见，f 是空间 l^p 上的非零连续线性泛函.

注 此例也说明了空间 $l^p(0<p<1)$ 与 $L^p[0,1](0<p<1)$ 是有着深刻差异的.

11. 存在某个非局部凸的度量线性空间，其中存在着不同于整个空间的零点的凸邻域.

度量线性空间 $l^p(0<p<1)$ 不是局部凸的，而 $f(x)=\xi_1(x=\{\xi_n\}\in l^p)$ 是 l^p 上的非零连续线性泛函，于是据例 8 中的定理可知，l^p 中存在零点的一个凸邻域 G，使 $G\neq l^p$.

注 这个例子说明了在一个度量线性空间中存在零点的凸邻域，还不能保证这个度量线性空间是局部凸的. 也就是说，这些零点凸邻域并不构成零点的基本邻域组.

12. 存在某个度量线性空间 X 的子集 A，使对每一 $f\in X^*$，都能由 $f(x)=0$(任意 $x\in A$)推出 $f(x)=0$(任意 $x\in X$)，但 span$A$ 在 X 中并不稠密.

容易证明，设 X 是赋范线性空间，$A\subset X$，如果对每一 $f\in X^*$，由 $f(x)=0(x\in A)$ 推出 $f(x)=0(x\in X)$，那么 span A 在 X 中必定稠密. 应当注意，对于一般的度量线性空间，相应的命题并不成立. 例如，取 $X=L^p[0,1](0<p<1)$，则 $X^*=\{0\}$(参看例 9)，故 $A=\{0\}$ 具有所需的性质.

13. 给定单位球面 S 上的某两个点 x 与 y，不存在 $z\in S$ 使 $d(x,z)=d(z,y)$ 的度量线性空间.

容易证明，在赋范线性空间 X 的单位球面上必定存在一个点，使它与其它两个点等距. 换言之，如果 $x,y\in X$ 且 $\|x\|=\|y\|=1$，那么必有 $z\in X$，使 $\|z\|=1$ 且 $\|x-z\|=\|y-z\|$. 应当注意，对于度量线性空间而言，这个命题并不成立. 例如，在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，令

$$d(x,y)=\frac{|\xi_1-\eta_1|}{1+|\xi_1-\eta_1|}+\frac{|\xi_2-\eta_2|}{1+|\xi_2-\eta_2|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbf{R}^2$. 易见，$(\mathbf{R}^2,d)$为一度量线性空间. 取$x=(1,1)$，$y=(1,-1)$，则$d(x,0)=d(y,0)=1$，即 x,y 都落在 $(\mathbf{R}^2,d)$ 的单位球面S上. 兹证不存在 $z\in S$ 而有 $d(x,z)=d(y,z)$. 反设存在 $z=(\zeta_1,\zeta_2)\in(\mathbf{R}^2,d)$，使 $d(x,z)=d(y,z)$，即

$$\frac{|1-\zeta_1|}{1+|1-\zeta_1|}+\frac{|1-\zeta_2|}{1+|1-\zeta_2|}=\frac{|1-\zeta_1|}{1+|1-\zeta_1|}+\frac{|1+\zeta_2|}{1+|1+\zeta_2|},$$

那么就得到$|1-\zeta_2|=|1+\zeta_2|$. 因此$\zeta_2=0$，从而

$$d(z,0)=\frac{|\zeta_1|}{(1+|\zeta_1|)}<1,$$

这与 $z\in S$ 相矛盾. 因此，不存在 $z\in S$ 使 $d(x,z)=d(y,z)$.

14．存在某个连续线性算子T，对于它不存在常数 M，使 $d(Tx,0)\leqslant Md(x,0)$.

我们知道，从一个赋范线性空间到另一个赋范线性空间的连续线性算子 T，恒有常数$M>0$，使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|.$$

应当注意，对于度量线性空间而言，相应的命题并不成立. 例如，在线性空间$\mathbf{R}^2$中，令

$$d(x,y)=\frac{|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|}{1+|\xi_2-\eta_2|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbf{R}^2$，于是 $(\mathbf{R}^2,d)$ 成一度量线性空间. 命

$$Tx=(\xi_1+\xi_2,0),$$

则T为由度量线性空间$(\mathbf{R}^2,d)$到其自身的连续线性算子，且

$$d(Tx,0)=|\xi_1+\xi_2|.$$

兹证不存在正数M，使 $d(Tx,0)\leqslant Md(x,0)$，即

$$|\xi_1+\xi_2|\leqslant M\frac{(|\xi_1|+|\xi_2|)}{(1+|\xi_2|)}.$$

事实上，对任意正整数 n，可取 $x_n=(0,n)$，于是 $d(Tx_n,0)=n$，而

$$nd(x_n,0)=\frac{n^2}{(1+n)}<n,$$

所以 $d(Tx_n,0)>nd(x_n,0)$.

15. 存在某个线性空间 X 上的两个线性距离 d_1,d_2，使对任何 $\{x_n\}\subset X$，$\{x_n\}$ 按这两个距离的收敛意义是相同的，但不存在常数 $m,M>0$，使 $md_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant Md_1(x,y)$.

我们知道，如果线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$，使得 $\{x_n\}\subset X$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛当且仅当它按范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛，那么必定存在常数 $m,M>0$，使对一切 $x\in X$，都有

$$m\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1,$$

而且这个命题之逆亦真. 应当注意，对于线性空间 X 上的两个线性距离 d_1 与 d_2，使得 $\{x_n\}\subset X$ 按距离 d_1 收敛当且仅当它按距离 d_2 收敛，此时不必存在常数 $m,M>0$ 而有

$$md_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant Md_1(x,y).$$

例如，在线性空间 $\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 上取距离 $d_1(x,y)=|x-y|$，$d_2(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$，此时 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}^1$ 按这两种距离的收敛意义是相同的，而且 $(\mathbf{R}^1,d_1)$ 完备而 $(\mathbf{R}^1,d_2)$ 不完备. 然而不存在常数 $m,M>0$，使

$$md_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant Md_1(x,y). \tag{1}$$

反设存在常数 $m,M>0$，使对一切 $x,y\in\mathbf{R}^1$，不等式(1)恒成立. 现取距离 d_2 意义下的 Cauchy 点列 $\{x_n\}$，即 $d_2(x_n,x_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$，则由(1)得到 $d_1(x_n,x_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$. 由于空间 $(\mathbf{R}^1,d_1)$ 是完备的，故存在 $x\in\mathbf{R}^1$ 而有 $d_1(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$. 再由不等式(1)得到 $d_2(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，故 $(\mathbf{R}^1,d_2)$ 也是完备的，矛盾.

16. 一个度量线性空间中的单位球，它不是凸集.

容易证明，赋范线性空间中的单位球是一个凸集. 然而，对于度量线性空间而言，相应的命题并不成立. 例如，我们用 $C(-\infty,+\infty)$ 代表定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一切实值连续函数所成的线性

空间，其中线性运算定义如常．令

$$p_n(x)=\sup_{-n\leqslant t\leqslant n}|x(t)|,$$

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)},$$

则$d(x,y)$是$C(-\infty,+\infty)$上的一个平移不变的距离，且$C(-\infty,+\infty)$为一度量线性空间．

兹证以 0 为球心，$\frac{1}{2}$为半径的闭球$B\left[0,\frac{1}{2}\right]$不是凸集，从而把距离$d$乘以 2 就得到度量线性空间中单位球不是凸集的例子．事实上，令

$$x(t)=\max\{0,1-|t|\},$$

$$y(t)=100\,x(t-2),$$

$$z(t)=\frac{[x(t)+y(t)]}{2},$$

则 $p_n(x)=1,n=1,2,\cdots;$

$p_1(y)=0,p_2(y)=p_3(y)=\cdots=100,$

$p_1(z)=\frac{1}{2},\quad p_2(z)=p_3(z)=\cdots=50,$

从而

$$d(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2},$$

$$d(y,0)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{100}{101}=\frac{100}{202}<\frac{1}{2},$$

$$d(z,0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{50}{51}=\frac{67}{102}>\frac{1}{2}.$$

因此，$x,y\in B\left[0,\frac{1}{2}\right]$，而$z=\frac{(x+y)}{2}\notin B\left[0,\frac{1}{2}\right]$，即$B\left[0,\frac{1}{2}\right]$不

是凸集.

注 其实,我们还可得到度量线性空间 $C(-\infty,+\infty)$ 中以任意元为球心,$\frac{1}{2}$为半径的闭球均不是凸集的结论,这是因为 d 是平移不变的距离,故对任意 $u\in C(-\infty,+\infty)$,恒有

$$d(u+x,u)=d(x,0)=\frac{1}{2},$$

$$d(u+y,u)=d(y,0)<\frac{1}{2},$$

$$d(u+z,u)=d(z,0)>\frac{1}{2},$$

即 $C(-\infty,+\infty)$ 中以 u 为球心,$\frac{1}{2}$为半径的闭球不是凸集.

17. 存在某个度量线性空间, 它不含有线性同胚于某个 Banach 空间的无穷维子空间.

Stiles[302]指出,度量线性空间 $l^p(0<p<1)$ 不含有线性同胚于某个 Banach 空间的无穷维子空间. 先证明下面的

定理 设 X 是 $l^p(0<p<1)$ 的一个无穷维的闭子空间,则 X 含有线性同胚于 l^p 的子空间.

证 因 X 是无穷维的,故 X 含有这样的点列$\{b_n\}$, 使 $d(b_n,0)=1$,而每个 b_n 形如

$$b_n=(0,\cdots,0,b_{k_n}^{(n)},b_{k_n+1}^{(n)},\cdots),$$

这里,k_n 可以选得任意的大. 我们令$\|b_n\|=d(b_n,0)$, 并选取 b_n,使

$$\sum_{k=k_{n+1}}^{\infty}|b_k^{(n)}|^p<\frac{1}{2^{n+1}},$$

然后定义点列$\{c_n\}$如下:

$$c_n=(0,\cdots,0,b_{k_n}^{(n)},\cdots,b_{k_{n+1}-1}^{(n)},0,\cdots).$$

容易证明,$\{c_n\}$是 l^p 中的等价于单位向量基$\{e_n\}$ 的一个基序列.

其实，这可由下述不等式直接得到：

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p\sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1}|b_k^{(n)}|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p,$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n\right\|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p.$$

又不难证明，$\{b_n\}$是X的某个子空间的一个基，而且它等价于$\{c_n\}$. 其实，这可由下述不等式直接得到：

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n(b_n-c_n)\right\|=\left\|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n(0,\cdots,0,b_{k_{n+1}}^{(n)},b_{k_{n+1}+1}^{(n)},\cdots)\right\|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{m}|\lambda_n|^p\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}|\lambda_n|^p\sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1}|b_k^{(n)}|^p$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{m}\lambda_n c_n\right\|.$$

由上可知，X的某个子空间的基$\{b_n\}$与空间l^p的单位向量基$\{e_n\}$是等价的，从而该子空间与l^p线性同胚. 定理证毕.

兹证l^p不含有线性同胚于某个Banach空间的无穷维子空间. 事实上，假如Y是一个Banach空间，它线性同胚于l^p的某个无穷维子空间，则据上面的定理，l^p线性同胚于Y的某个子空间. 我们知道，Y的子空间含有有界的凸的开邻域，而l^p不含有有界的凸的开邻域(参看[187]，pp.43—44)，故这是不可能的.

18. 存在某个度量线性空间，它线性同胚于它的任一有有限余维的子空间.

Stiles[302]指出，度量线性空间$l^p(0<p<1)$具有所需的性质，这里，对$x=\{x_n\}\in l^p$，令

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

我们先陈述下面的

引理 1 设 X 是 l^p 的闭子空间，使 X 不含有这样的子空间，它既与 l^p 线性同胚，又在 l^p 中可补，则对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 且 $a=(0,\cdots,0,a_n,a_{n+1},\cdots)\in X$，$\|a\|\leqslant 1$ 时，就有 $\sum_{j=n}^{\infty}|a_j|\leqslant\varepsilon$.

关于引理 1 的证明可参看[302].

引理 2 设 X 是 l^p 的相补子空间. 若 X 含有线性同胚于 l^p 且在 X 中相补的子空间 Y，则 X 线性同胚于 l^p.

引理 2 属于 Pelczyński[239]，其证明可参看作者原文.

兹证对每一 $p\,(0<p<1)$，空间 l^p 线性同胚于它的任一具有有限余维的子空间. 其实，只要证明 l^p 线性同胚于它的任一超平面即可.

设 X 是 l^p 中的一个超平面，假如 X 不线性同胚于 l^p，那么据引理 2，X 不含有既线性同胚于 l^p 又在 X 中可补的子空间. 于是，引理 1 的条件得到满足. 假定 $l^p=\text{span}\,\{\{x\}\oplus X\}$，这里，$x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$. 然后对每一 n，在 $x+X$ 中存在形如$(0,\cdots,0,a_n,0,\cdots)$的向量，这里 $a_n\neq 0$. 因此对每一 n，我们可以在 X 中选出形如

$$y=(-x_1,\cdots,-x_{n-1},-x_n+a_n,-x_{n+1},\cdots),$$

$$z=(-x_1,\cdots,-x_n,-x_{n+1}+a_{n+1},-x_{n+2},\cdots)$$

的向量. 由于 $y-z=(0,\cdots,0,a_n,-a_{n+1},0,\cdots)\in X$，可见在 X 中可找出单位向量，它在空间 l 的范数下大于$2^{1-\frac{1}{p}}$，这与引理 1 的结论发生矛盾. 因此，X 必定线性同胚于空间 l^p.

注 (i) 可以证明，若 X 与 Y 都是 Banach 空间 l 的无穷维闭

子空间，且商空间 l/X 线性同胚于 l/Y，则 Y 必定线性同胚于 Y.
于是便产生问题：若 X 与 Y 都是度量线性空间 $l^p(0<p<1)$ 的无穷维闭子空间，且商空间 l^p/X 线性同胚于 l^p/Y，则 X 是否必定线性同胚于 Y？

(ii) 若 X 是度量线性空间 $L^p[0,1](0<p<1)$ 的相补子空间，则是否存在 $q(0<q<1)$，使 X 线性同胚于 $L^q[0,1]$？

19. 存在某个 Fréchet 空间，其中的一个弱 Schauder 基，它不是 Schauder 基.

对于 Banach 空间而言，弱 Schauder 基与 Schauder 基是等价的(参看[290]). 对于 Fréchet 空间而言，弱 Schauder 基不必是 Schauder 基. 例如，Stiles[302]指出，Fréchet 空间 $l^p(0<p<1)$ 中存在弱 Schauder 基，它不是 Schauder 基. 我们先证明

引理 1 设 X 是可分的局部有界（即 X 中存在有界的零的邻域）的 Fréchet 空间，则对某个 $p\in(0,1)$，X 线性同胚于 l^p 的一个商空间.

证 因 X 是局部有界的 Fréchet 空间，故对某个 $p\in(0,1)$，可在 X 上赋予 p 齐次范数 $\|\cdot\|_p$，即 $\|\alpha x\|_p=|\alpha|^p\|x\|_p$ (参看[266]). 又因 X 可分，故在 X 中存在可数点列 $\{x_n\}$，它在单位球面 $S_X=\{x\in X:\|x\|_p=1\}$ 中稠密. 设 $\{e_i\}$ 是空间 l^p 的单位向量基，令

$$Te_i=x_i,$$

然后把 T 线性地扩张到 $\mathrm{span}\{e_i\}$ 上. 由于

$$\left\|T\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\right)\right\|_p\leqslant\sum_{k=1}^n|\lambda_k|^p\|x_k\|_p$$

$$\leqslant\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\right\|_p,$$

故 T 是连续的，从而可把 T 连续扩张到整个空间 l^p 上，扩张后的连续线性算子仍记作 T.

兹证 T 是 l^p 到 X 上的一个满射. 为此，任取 $x\in S_X$，则在 l^p 中存在一个点列，它收敛于某点 x_0，使 $Tx_0=x$，即 T 是一个满射. 由此可知，X 线性同胚于 l^p 的一个商空间（参看[327]，p.79）.

推论 对每一 p $(0<p<1)$ 及每一 q $(q\geq p)$，空间 l^q 和 $L^q[0,1]$ 都线性同胚于 l^p 的一个商空间.

证 这可由引理 1 的证明直接推知，因为当 $0<p\leq q<1$ 时，

$$\left\|T\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)\right\|_q\leq\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{q}{p}},$$

而当 $q\geq 1$ 时，

$$\left\|T\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)\right\|_q\leq\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

引理 2 对每一 $p(0<p<1)$，空间 l^p 包含一个闭的真子空间 X，使 l^p 上的任一连续线性泛函 f，若 f 在 X 上为零，则 f 在 l^p 上也为零.

证 取 l^p 的一个闭的真子空间 X，使商空间 l^p/X 线性同胚于空间 $L^p[0,1]$（引理 1 的推论）. 由于 $L^p[0,1]$ 上不存在非零连续线性泛函，因而不存在 l^p 上的这样的非零连续线性泛函，它在 X 上为零. 证毕.

兹证对每一 $p(0<p<1)$，空间 l^p 含有一个弱 Schauder 基，它不是 Schauder 基. 事实上，取 l^p 的子空间 X 使商空间 l^p/X 线性同胚于 $L^p[0,1]$，则易见 X 是 Banach 空间 l 的一个稠密子空间. 因此，据 Krein-Milman-Rutman[180] 定理，l 有基 $\{b_n\}$，这里 $b_n\in X$，$n=1,2,\cdots$. 因 X 是 l^p 的闭的真子空间，故由 $b_n\in X$ 可知，$\{b_n\}$ 不是 l^p 的基. 另一方面，$\{b_n\}$ 显然是 l^p 的弱 Schauder 基.

注 Shapiro[283] 于1974 年引入了一类非局部凸的 Fréchet 空间，其中存在弱基而不是基. Drewnowski[89] 于1977 年进一步指

出，若X是非局部凸的 Fréchet 空间，且X有弱基，则X中必定存在弱基，它不是基.

29. 存在某个度量线性空间 X，使 $X^*=\{0\}$，而 X 有 Schauder分解.

Singer[289]指出，若X是可分且完备的度量线性空间，使$X^*=\{0\}$，则X没有基. 特别，区间$[0,1]$上的一切(L)可测函数按通常线性运算所成的线性空间S上取距离

$$d(x,y)=\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt,$$

则S是一个没有基的可分完备度量线性空间.

Retherford[259]指出，尽管S没有基，但它有 Schauder 分解. 事实上，对每一正整数n，令$A_n=\left[0,\frac{n}{(n+1)}\right]\cup\{1\}$，则每个$A_n$均为$(L)$可测集，且$A_n\subset A_{n+1}$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=[0,1]$. 对每一$x\in S$，令

$$P_n(x)=\begin{cases}x(t), & t\in A_n,\\ 0, & t\notin A_n.\end{cases}$$

显然，P_n是S到S内的线性映射，且$P_n^2=P_n$.

又因为

$$\int_0^1 \frac{|P_n(x)(t)|}{1+|P_n(x)(t)|}dt=\int_{A_n}\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt$$

$$\leqslant\int_0^1 \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt,$$

所以P_n在$x=0$是连续的，从而P_n在S上处处连续，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|P_n(x)(t)-x(t)|}{1+|P_n(x)(t)-x(t)|}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]\setminus A_n}\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt.$$

由于 $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$,故上式右端的极限为 0. 于是在空间 S 的距离意义下，有 $P_n(x) \to x$. 令 $E_1(x) = P_1(x)$，而对 $n \geqslant 2$,令

$$E_n(x) = P_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} E_i(x),$$

并用 $R(E_i)$代表算子 E_i 的值域,则$\{R(E_i)\}$是 S 的一个 Schauder 分解.

注　用同样的方法可构造度量线性空间 $L^p[0,1]$($0<p<1$)的 Schauder 分解.

21. 存在某个局部凸的 Fréchet 空间中的有界闭凸集，它没有支撑点.

设 X 是实局部凸拓扑线性空间，A 是 X 的非空凸集. 若存在 $f \in X^*$,使 $f(x) = \sup f(A)$,则 $x \in A$称为 A 的支撑点.

Bishop 和 Phelps 证明了，若 X 是 Banach 空间，A 是 X 的一个有界闭凸集，则 A 的支撑点在 A 的边界上是稠密的.

Bishop-Phelps 定理不能推广到局部凸的 Fréchet 空间. Peck[238]给出了一个局部凸的 Fréchet 空间 X ,在 X 中有一个有界闭凸集,它没有支撑点. 读者如有兴趣,可参看作者原文.

注　Bishop-Phelps 定理不可推广到局部凸的 Fréchet 空间，但对$(X^*, \sigma(X^*, X))$,却有如下的结论：设 X 是 Banach空间，C 是 X^*的弱*闭有界凸子集,则 C 的弱*支撑点是在 C 的范数边界上稠密的,其中 C 的弱*支撑点 x_0^* 是指 $x_0^* \in C$，且存在 $x \in X$,使得

$$x_0^*(x) = \sup_{x^* \in C} x^*(x).$$

第十一章 压缩型映射与不动点

引言

考虑集X到X内(或到包含X的某一集内)的一个映射f，若存在$x_0\in X$使$f(x_0)=x_0$,则称x_0为f的一个不动点.

设f是度量空间X到X内的映射,我们称f是一个压缩映射,是指存在常数α使得$0<\alpha<1$且

$$d(f(x),f(y))\leqslant \alpha d(x,y),\forall x,y\in X.$$

我们称f是一个弱压缩映射，是指

$$d(f(x),f(y))<d(x,y),x,y\in X,x\neq y.$$

我们称f为非扩张映射，是指

$$d(f(x),f(y))\leqslant d(x,y),\forall x,y\in X.$$

显然，压缩映射必为弱压缩映射；弱压缩映射必为非扩张映射．又，压缩映射至多只能有一个不动点.

定理 1 (Banach) 非空完备度量空间X到X的任一压缩映射在X中具有唯一的不动点.

定理 2 设度量空间X是完备的，f是X到X的映射.如果存在正整数n,使f^n是X上的一个压缩映射，那么映射f在X中必有唯一的不动点.

定理 3 (Schauder)设U是Banach空间X中的紧凸集，f是U到U的连续映射，则f必有不动点.

定理 4 (Schauder-Тихонов) 设X是一个局部凸的拓扑线性空间,U是X中的紧凸集．又设f是U到U的连续映射,则存在$x\in U$,使得$f(x)=x$.

一个拓扑空间X称为具有不动点性质，如果每一个由X到X内的连续映射都有不动点.

不动点性质是一个拓扑性质,即若X同胚于Y,且X具有不动

点性质，则Y也具有不动点性质.

有关不动点理论的更多的材料可参看[18].

1. Banach 压缩映射原理中空间完备性的条件不可去掉.

设X是区间[0，1]中的一切无理数所成之集，令$d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in X$,则(X,d)为一不完备的度量空间. 现在定义映射$Tx=\frac{x}{2}$，$x\in X$,则

$$d(Tx,Ty)=\frac{d(x,y)}{2},$$

故T是将X映入X自身的压缩映射. 但$x=Tx$的解是$0\notin X$，也就是说，T不存在唯一的不动点$x_0\in X$.

2. 一个非压缩映射T,使T^2是压缩映射.

容易证明，若T是压缩映射，则T^2也是压缩映射. 应当注意，这个命题之逆并不成立. 例如，设T是由空间$C[0,1]$到$C[0,1]$内的如下的映射：对于$x\in C[0,1]$，设$Tx=y$. 式中

$$y(t)=\int_0^t x(u)du, 0\leqslant t\leqslant 1.$$

取$x_1(t)\equiv C_1$, $x_2(t)\equiv C_2$，则

$$\begin{aligned}d(Tx_1,Tx_2)&=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^t C_1du-\int_0^t C_2du\right|\\&=|C_1-C_2|=d(x_1,x_2),\end{aligned}$$

可见T不是压缩映射. 另一方面，对任意$x_1,x_2\in C[0,1]$，有

$$\begin{aligned}d(T^2x_1,T^2x_2)&=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^t\left\{\int_0^u[x_1(v)-x_2(v)]dv\right\}du\right|\\&\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^t ud(x_1,x_2)du\right|\\&=\frac{1}{2}d(x_1,x_2),\end{aligned}$$

故T^2是压缩映射.

3. 一个不连续映射f，使f^2是压缩映射.

如所周知，若 f 为压缩映射，则 f 必为连续映射．然而，f^2 为压缩映射时，f 未必是连续的．下面的例子是由 Bryant[89] 作出的．

设 $f:[0,2]\to[0,2]$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1],\\ 1, & x\in(1,2],\end{cases}$$

则对任意 $x\in[0,2]$，恒有 $f[f(x)]=0$，故 f^2是$[0,2]$到$[0,2]$的压缩映射．但 f 并不连续．

4．存在某个完备度量空间 X 上的映射 f，对任意 $x,y\in X$，存在常数 $\alpha<1$，使 $d(f(x),f(y))\leqslant\alpha d(x,y)$，但 f 没有不动点．

对 $x\in\mathbf{R}^1$，令 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}+x-\operatorname{arc\ tg}x$，

则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|x-y+\operatorname{arc\ tg}y-\operatorname{arc\ tg}x|\\&=\left|x-y+\frac{(y-x)}{(1+\xi^2)}\right|\\&=\left|\frac{(y-x)\xi^2}{(1+\xi^2)}\right|\\&=\alpha|x-y|,\end{aligned}$$

其中 ξ 在 x 与 y 之间，而 $\alpha=\dfrac{\xi^2}{(1+\xi^2)}<1$．但 f 显然没有不动点．

注　压缩映射的定义中系数 α 是不依赖于 x，y 的选择．上述反例说明了如果 α 依赖于 x，y 的选择，那么就不能保证 f 具有不动点．

5．存在某个完备度量空间上的弱压缩映射，它没有不动点．

弱压缩映射未必有不动点．例如，取 $X=\mathbf{R}^1$，并令

$$f(x)=1+x-\frac{x}{(1+|x|)}.$$

因当$x\neq 0$时，$0<f'(x)<1$，故f是由X到X自身的弱压缩映射．然而，对任意$x\in X$，显然有$f(x)>x$．因此，f没有不动点．

这个例子是由 Lossers[210]作出的．

6．某个紧度量空间上的具有不动点的弱压缩映射，它不是压缩映射．

设$X=[0,1]$，并在X上取通常的距离，则X为一紧度量空间．令$f(x)=\sin x$，则对任何$x\in X$，恒有$0<f'(x)<1$，故f是X到X自身的弱压缩映射，且有唯一的不动点$x=0$．另一方面，对任何$\alpha\,(0<\alpha<1)$，存在$x\in X$使$\sin x>\alpha x$，即f不是压缩映射．

7．存在某个赋范线性空间中的有界闭凸子集，它没有不动点性质．

Schauder 证明了赋范线性空间中的任一非空紧凸子集U具有不动点性质．

Kakutani[165]指出，在 Schauder 定理中U是紧的这一条件不能用U是有界的和闭的来代替．为此，考虑 Hilbert 空间$l^2(Z)$，其中Z为整数集．令

$$y_n=(\cdots,0,0,1,0,0,\cdots),$$

其中 1 在第n个位置上．对于$l^2(Z)$中的点x，可写成

$$\begin{aligned}x&=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,x_2,\cdots)\\&=\sum x_n y_n.\end{aligned}$$

记A为右移算子，$Ax=\sum x_n y_{n+1}$．为构造所需的例子，先证明下面的

引理 向量$x-Ax$仅当$x=0$时才是y_0的倍量．

证 关系式

$$x-Ax=\sum(x_n-x_{n-1})y_n=cy_0$$

要求对一切$n>0$有$x_n=x_0$，而对一切$n<0$有$x_n=x_{-1}$；对于$l^2(Z)$中的元x，这只有在$x_0=x_{-1}=0$从而$x=0$时才是可能的，引理得

证.

兹证 $l^2(Z)$中的单位闭球 $B[0,1]$不具有不动点性质. 为此，我们通过

$$Tx=(1-\|x\|)y_0+Ax$$

来定义所要的映射. T显然是连续的，且因当$\|x\|\leqslant 1$时有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leqslant (1-\|x\|)\|y_0\|+\|Ax\| \\ &=(1-\|x\|)+\|x\|=1,\end{aligned}$$

故T映$B[0,1]$到$B[0,1]$内. 又因若

$$x=Tx=(1-\|x\|)y_0+Ax,$$

则 $x-Ax=(1-\|x\|)y_0$. 但此式在 $x=0$ 时显然不可能，而在 $x\neq 0$ 时依引理也是不可能的. 于是断定T没有不动点.

注 Klee[175] 进一步证明了赋范线性空间中的任何凸的非紧子集不具有不动点性质.

8. 一个没有不动点性质的紧度量空间，其中存在稠密子空间而有不动点性质.

设A是实平面上以$(0,-2)$,$(4,-2)$,$(4,2)$,$(0,2)$为顶点的正方形(不包括内部). 又设

$$B=\left\{(x,y):0<x\leqslant 1,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}.$$

令$X=A\cup B$，并在X上取实平面的通常距离，则X为一紧度量空间，且X没有不动点性质.

设A_0是A减去由$(0,-1)$到$(0,1)$确定的垂直开区间，并令$Y=A_0\cup B$，则Y在X中稠密，且Y具有不动点性质.

9. 对空间 c_0 中的单位球 U，存在由U到U内的无不动点的非扩张映射.

Browder[57]证明了，若 μ 为 Hilbert 空间H中的有界闭凸子集，则任一 μ 到 μ 内的非扩张映射有一不动点.

应当注意，对于一般的 Banach 空间，这一命题并不成立. 例

如，设U为 Banach 空间 c_0 中的单位闭球，令

$$Tx=T(x_1,x_2,\cdots)=(1,x_1,x_2,\cdots),$$

则T为一映U到U内的非扩张映射，然而T无不动点.

注 对于一致凸 Banach 空间的情形，上述命题仍然成立（参看[58]，[174]或[116]）.

下列几种情形都是没有解决的：

(1) 命题中的H为任一自反 Banach 空间.

(2) 命题中的H为任一严格凸的 Banach 空间.

(3) 命题中的 μ 为任一 Banach 空间的弱紧凸子集.

10. 存在某个 Banach 空间中的单位闭球上的弱压缩映射，它没有不动点.

Smart 提出下述问题：Banach 空间中的单位闭球上的每一弱压缩映射是否都具有不动点？这个问题的答案是否定的. 下面的例子是由张仲帆作出的。

设B是 Banach 空间 c_0 中的单位闭球，作B到B内的映射f如下：

$$x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\in B\to(y_1,\cdots,y_{n+1},\cdots)\in B,$$

这里 $y_1=1,y_{n+1}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}x_n,n\geqslant 1$. 显然，$|y_{n+1}|<|x_n|\leqslant 1$，$n=1,2,\cdots$，且$|y_n|\to 0(n\to\infty)$，所以$f(x)=(y_1,\cdots,y_{n+1},\cdots)\in B$.

兹证f是弱压缩映射. 事实上，因为$x\neq y$，故存在n，使得$x_n\neq y_n$. 而$(x_k-y_k)\to 0(k\to\infty)$，所以存在$N'$，当$k>N'$时，

$$|x_k-y_k|<|x_n-y_n|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

于是，当$k>\max\{N',n\}=N$时，就有

$$\|f(x)-f(y)\|=\sup_k\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k^2}}|x_k-y_k|$$

$$= \max_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k^2}}|x_k-y_k|$$
$$< \max_{1\leqslant k\leqslant N}|x_k-y_k|\leqslant\|x-y\|,$$

即 f 为弱压缩映射.

若 f 在 B 上有不动点，即存在 $x\in B$，使得 $x=f(x)$，亦即

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1},\cdots)=\left(1,\frac{1}{2}x_1,\cdots,\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}x_n,\cdots\right),$$

则 $x_1=1, x_2=\frac{1}{2},\cdots, x_{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}x_n,\cdots$，从而

$$x_{n+1}=1\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

因此，$\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\ln\frac{k}{k+1}$. 由于 $\left|\frac{1}{k^2}\ln\frac{k}{k+1}\right|<\frac{1}{k^2}$，故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\ln\frac{k}{k+1}$ 收敛，因而 $x_n\not\to 0\ (n\to\infty)$，即 $x\notin B$. 可见 f 在 B 上没有不动点.

11. 不动点不唯一的非扩张映射.

非扩张映射未必具有不动点(参看例 9). 另一方面，非扩张映射若有不动点，其不动点未必唯一. 例如，设 T 是度量空间 X 到 X 上的恒等映射，则 T 为非扩张映射，且 X 的每一点皆为 T 的不动点.

12. 存在区间[0,1]到[0,1]内的两个可换的连续映射 f,g，它们没有公共的不动点.

多年来，我们不知道映紧凸集到其自身内的两个可换（非线性）映射是否必有公共的不动点. 直到 1969 年，Boyce[56] 和 Huneke[140] 各自独立地解决了这个问题. 他们指出，存在区间 [0，1] 到其自身内的两个可换的连续映射，它们不具有公共的不

读者如有兴趣，可参看作者原文.

13. $\mathbf{R}^3$中的一个紧的可缩的子集，它没有不动点性质.

拓扑空间X称为可缩(成X中的一点x_0)的，如果存在$X\times[0,1]$到X内的一个连续映射$f(x,t)$，使得$f(x,0)\equiv x$，$f(x,1)\equiv x_0$.

Kinoshita[178]指出，存在一个紧的可缩的$\mathbf{R}^3$中的子集，它没有不动点性质. Kinoshita所述的那个集，是由一个水平闭圆盘，一个以此圆盘的边为准线的单位高的直柱面，以及一个单位高的垂直于圆盘的无限大螺旋状曲面所成的并，该曲面从柱面的轴起成螺旋状向外逼近柱面(参看图3).

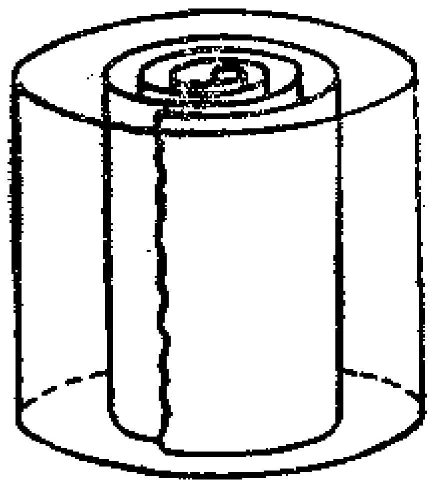


图 3

14. 具有不动点性质的既非紧的也非可缩的集合.

在图4和图5中所示的诸集都具有不动点性质. 图4中的集不是紧的；图5中的集既不是紧的也不是可缩的.

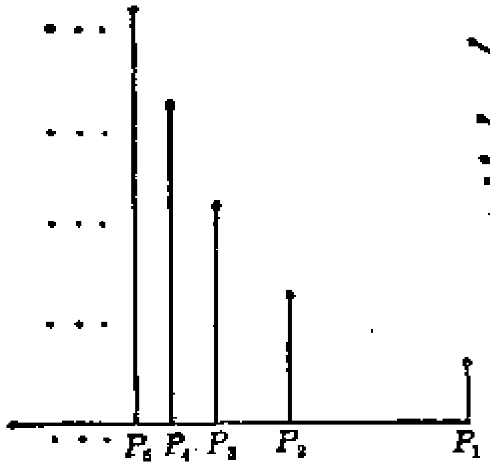


图 4

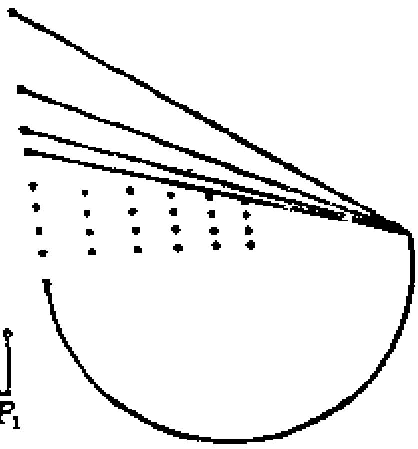


图 5

我们可以描述这些集如下：在每一种情形，该集都具有$X=X_0\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)$这一形式，这里每一个$X_n$同胚于一个闭线段，

且对 $n>0$, X_n 在其一个端点 P_n 处连到 X_0上. 在图 4 中, $X_0=[0,1]$, $P_n\to 0(n\to\infty)$, 而X_n是在P_n上方的高为 n 的一个线段. 在图 5 中, X_0是下半平面中把(0,0)和(1,0) 连接起来的一个半圆, 且对 $n\geqslant 1$, X_n是把 $P_n=(1,0)$ 和点 $(0,n^{-1})$ 连接起来的线段.

兹证这些集都具有不动点性质. 我们首先注意到:

把 X_i中的一点和$X\backslash X_i$中的一点连接起来的任一弧必定通过 P_i. (1)

令T是X到X内的任一连续映射. 考虑三种情形.

(i) 对某个 $i\geqslant 1$, $TP_i=P_i$. 此时 P_i是一个不动点.

(ii) 对某个 $i\geqslant 1$, $TP_i\in X_i\backslash\{P_i\}$. 用

$$Rx=\begin{cases}x, & x\in X_i,\\ P_i, & x\notin X_i,\end{cases}$$

定义X到 X_i上的映射R. 则依(1).

当 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$是$X$中的一个弧时, $Rx(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 将是 X_i中的一个弧. (2)

若置 $Sx=RTx$, 则S给出一个 X_i到 X_i内的映射; 我们来证明S是连续的. 如果在 X_i中 $x_n\to x$, 那么我们能够假定沿着 X_i中的一个弧 $x_n\to x$; 这样, 沿着X中的一个弧 $Tx_n\to Tx$, 因此依(2), $RTx_n\to RTx$, 即 $Sx_n\to Sx$. 于是, S是连续的, 从而在 X_i中具有不动点 z. 因 $z\neq P_i$, 故有 $Tz=Sz=z$.

(iii) 对一切 $i\geqslant 1$, $TP_i\notin X_i$. 用

$$Rx=\begin{cases}x\ , x\in X_0,\\ P_i, x\in X_i\ (i\geqslant 1),\end{cases}$$

定义X到 X_0上的映射R. 和(ii)一样, 我们看出 $Sx=RTx$是连续的. 于是S有不动点 z. 因 z不能是一个 P_i, 故有

$$Tz=Sz=z.$$

这样, 在每一情形T都有不动点.

注　由例 13 和例 14 可知，紧的、可缩的这些条件，对于一个具有不动点性质的集来说，既非必要的、也非充分的.

15. 一个自反 Banach 空间中的具有正规结构的非空闭凸子集 U，及由 U 到其自身的映射 T，适合 $\|Tx-Ty\|\leqslant K\|x-y\|$，而 T 没有不动点.

设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，$x\in A$ 称为 A 的非直径点，如果

$$\sup_{y\in A}\|x-y\|<\operatorname{diam} A.$$

设 U 为 Banach 空间 X 的子集，称 U 具有正规结构，如果 U 的每个有界闭凸子集都具有非直径点.

Kirk[174]指出，非扩张映射的不动点存在与空间的正规结构的几何性质有关. 他证明了，若 U 是自反 Banach 空间中的具有正规结构的非空有界闭凸子集，T 是 U 到其自身的非扩张映射，则 T 有不动点.

应当注意，若 T 不是非扩张映射，则上述命题的结论就不再成立. Kirk 有例如下：

我们用 U 代表空间 l^2 中的单位闭球. 易见，U 具有正规结构. 设 $K>1$，对 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in U$，令

$$Tx=(t,(1-\|x\|),x_1,x_2,\cdots),$$

其中 t 是常数使 $t<1$ 且 $0<t\leqslant(K^2-1)^{\frac{1}{2}}$. 易于验证，$T$ 映 U 到其自身，且对任何 $x,y\in U$，都有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant K\|x-y\|.$$

显然，T 没有不动点.

16. 一个 Banach 空间中具有正规结构的非空有界闭凸子集 U，及由 U 到其自身的非扩张映射 T，使 T 没有不动点.

Kirk 指出，在例 15 陈述的命题中，Banach 空间为自反的条件不可去掉. 他的例子如下：设

$$U=\{x\in C[0,1]:x(0)=0,x(1)=1,0\leqslant x(t)\leqslant 1\},$$

则U为Banach空间$C[0,1]$中的具有正规结构的非空有界闭凸子集. 定义映射T如下:

$$Tx(t)=tx(t),$$

易见, T映U到其自身内, 且是非扩张映射. 然而, T没有不动点.

17. 一个Banach空间X的凸子集U,及由U到X内的非扩张映射T,使T的不动点集不是凸的.

容易证明,设U为严格凸Banach空间X的凸子集,若T是U到X内的非扩张映射, 则T的不动点集是凸的.

应当注意, 上述命题不能推广到任意的Banach空间. DeMarr[82]有例如下: 考察具有范数

$$\|(x,y)\|=\max\{|x|,|y|\}$$

的非严格凸Banach空间$\mathbf{R}^2$,及由$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$内的非扩张映射$(x,y)\to(|y|,y)$,此时不动点集为平面中第一及第四象限的对角线的并, 它不是凸集.

18. 存在某个Banach空间X上的分别具有不动点x_n $(n=0,1,2,\cdots)$的压缩映射$T_n(n=0,1,2,\cdots)$, 使对任意$x\in X$, $\{T_nx\}$收敛于T_0x,但$\{x_n\}$并不收敛于x_0.

我们有下述问题: 设(X,d)是完备度量空间, $T_n(n=0,1,2,\cdots)$是由X到X内的压缩映射,它们的不动点分别为$x_n(n=0,1,2,\cdots)$. 若对任意$x\in X$, $\{T_nx\}$收敛于T_0x,则是否必有$\{x_n\}$收敛于x_0?

Bonsall[53]证明了,若$\{T_n\}$具有相同的Lipschitz常数α $(0\leqslant\alpha<1)$,即对任意n和任意$x,y\in X$,均有

$$d(T_nx,T_ny)\leqslant\alpha d(x,y),$$

则不动点列$\{x_n\}$必收敛于x_0. Nadler[225]证明了,若(X,d)是局部紧的度量空间, $T_n(n=0,1,2,\cdots)$是由X到X内的具有不动点$x_n(n=0,1,2,\cdots)$的压缩映射, 且对任意$x\in X$, $\{T_nx\}$收敛于

T_0x，则$\{x_n\}$收敛于x_0。应当注意，X为局部紧的条件不可去掉，甚至对可分或自反Banach空间也是如此．为构造所需反例，先证明下述

引理 设(X,d)是度量空间，$T_n(n=0,1,2,\cdots)$是由X到X内的具有不动点$x_n(n=0,1,2,\cdots)$的压缩映射．若对任意$x\in X$，$\{T_nx\}$收敛于T_0x，且$\{x_n\}$的某个子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$y_0\in X$，则$y_0=x_0$。

证 对任意$\varepsilon>0$，存在正整数n_0，当$k\geqslant n_0$时$d(x_{n_k},y_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，$d(T_{n_k}y_0,T_0y_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，故

$$\begin{aligned}d(x_{n_k},T_0y_0)&=d(T_{n_k}x_{n_k},T_0y_0)\\&\leqslant d(T_{n_k}x_{n_k},T_{n_k}y_0)+d(T_{n_k}y_0,T_0y_0)\\&<d(x_{n_k},y_0)+d(T_{n_k}y_0,T_0y_0)<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\{x_{n_k}\}$收敛于T_0y_0，从而$T_0y_0=y_0$。由T_0的不动点的唯一性知$y_0=x_0$。

现设X为无穷维可分或自反Banach空间，令$F=\{f\in X^*:\|f\|\leqslant1\}$，则$F$是弱*序列紧的．因$X$是无穷维的，故$F$中存在泛函列$\{g_n\}$，使$\{g_n\}$中不存在按范数收敛的子列．因$F$是弱*序列紧的，故$\{g_n\}$中有子列$\{g_{n_k}\}$，它弱*收敛于$g\in X^*$。令

$$f_k=\frac{(g_{n_k}-g)}{\|g_{n_k}-g\|},$$

则$\{f_k\}$弱*收敛于零泛函，且$\|f_k\|=1(k=1,2,\cdots)$。

对每一k，令$x_k\in X$使$\|x_k\|=1$，且$|f_k(x_k)|>1-\frac{1}{k^2}$．再对每一$x\in X$，定义映射

$$T_kx=\left(1-\frac{1}{k}\right)f_k(x)\frac{x_k}{f_k(x_k)}+\frac{x_k}{k},\quad k=1,2,\cdots.$$

由于对任意$x,y\in X$，均有

$$
\begin{aligned}
\|T_k x - T_k y\| &= \left\|\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{f_k(x)x_k}{f_k(x_k)} \right.\\
&\quad \left. -\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{f_k(y)x_k}{f_k(x_k)}\right\| \\
&=\left(1-\frac{1}{k}\right)|f_k(x)-f_k(y)|\frac{\|x_k\|}{|f_k(x_k)|} \\
&\leqslant\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\|x-y\|}{|f_k(x_k)|} \\
&\leqslant\frac{k\|x-y\|}{(1+k)},
\end{aligned}
$$

故 T_k 是由 X 到 X 内的压缩映射．又由于 $\{f_k\}$ 弱*收敛于零泛函，故 $\{T_k x\}$ 收敛于零映射．易见，对每一 k，x_k 是 T_k 的唯一不动点．由于 $\|x_k\|=1$，故由引理知不动点列 $\{x_k\}$ 没有收敛子列．

19．各种压缩型映射的比较．

Rhoades[260] 总结了 125 种压缩型映射的定义，最主要的是前面 25 种．我们先列出这 25 种压缩型映射的定义，然后指出其部分蕴涵关系．符号 $(a)\Rightarrow(b)$ 意指任一映射满足 (a) 时亦必满足 (b)，我们一概略去其证明．符号 $(b)\nRightarrow(a)$ 意指存在满足 (b) 而不满足 (a) 的映射，我们将给出反例来说明这一事实．

1．压缩型映射的定义．

以下均设 X 为度量空间，d 为 X 上的距离，f 为 X 到 X 内的映射．

(1) (Banach) 存在实数 a，$0\leqslant a<1$，使对任何 $x, y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant a d(x,y).$$

(2) (Rakotch[254]) 存在单调递减函数 $\alpha:(0,+\infty)\to[0,1)$，使对任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant \alpha d(x,y).$$

(3) (Edelstein[95]) 对任意 x，$y\in X$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))<d(x,y).$$

(4) (Kannan[187])存在实数 a，$0<a<\frac{1}{2}$，使对任意 x，$y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant a[d(x,f(x))+d(y,f(y))].$$

(5)(Bianchini[49])存在实数 h，$0\leqslant h<1$，使对任意 $x,y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant h\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y))\}.$$

(6) 对任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))<\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y))\}.$$

(7) (Reich[255])存在非负实数 a,b,c 满足 $a+b+c<1$，使对任意 $x,y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant ad(x,f(x))+bd(y,f(y))+cd(x,y).$$

(8) (Reich[256])存在$(0,+\infty)$到$[0,1)$内的单调递减函数 a,b,c，满足 $a(t)+b(t)+c(t)<1$，使对任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant a(d(x,y))d(x,f(x))+b(d(x,y))d(y,f(y))+c(d(x,y))d(x,y).$$

(9) 存在非负函数 a,b,c 满足

$$\sup_{x,y\in X}\{a(x,y)+b(x,y)+c(x,y)\}\leqslant\lambda<1,$$

使对任意 $x,y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant a(x,y)d(x,f(x))+b(x,y)d(y,f(y))+c(x,y)d(x,y).$$

(10) (Sehgal[280])对任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))<\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y)),d(x,y)\}.$$

(11) (Chatterjea[66])存在实数 a，$0<a<\frac{1}{2}$，使对任意 x，$y\in X$，都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant a\{d(x,f(y))+d(y,f(x))\}.$$

(12) 存在实数 $h, 0 \leqslant h < 1$，使对任意 $x, y \in X$，都有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant h \max\{d(x, f(y)), d(y, f(x))\}.$$

(13) 对任意 $x, y \in X, x \neq y$，都有

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(y)), d(y, f(x))\}.$$

(14) 存在非负实数 a, b, c，满足 $a+b+c<1$，使对任意 $x, y \in X$，都有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant ad(x, f(y)) + bd(y, f(x)) + cd(x, y).$$

(15) 存在 $(0, +\infty)$ 到 $[0,1)$ 内的单调递减函数 a, b, c，满足 $a(t)+b(t)+c(t)<1$，使对任意 $x, y \in X, x \neq y$，都有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant a(d(x, y))d(x, f(y)) + b(d(x, y)) \cdot d(y, f(x)) + c(d(x, y))d(x, y).$$

(16) 存在非负函数 a, b, c，满足

$$\sup_{x, y \in X}\{a(x, y) + b(x, y) + c(x, y)\} \leqslant \lambda < 1,$$

使对任意 $x, y \in X$，都有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant a(x, y)d(x, f(y)) + b(x, y)d(y, f(x)) + c(x, y)d(x, y).$$

(17) 对任意 $x, y \in X, x \neq y$，都有

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(y)), d(y, f(x)), d(x, y)\}.$$

(18) (Hardy-Rogers[128]) 存在非负常数 a_i 满足 $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$，使对任意 $x, y \in X$，都有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant a_1 d(x, y) + a_2 d(x, f(x)) + a_3 d(y, f(y)) + a_4 d(x, f(y)) + a_5 d(y, f(x)).$$

(19) (Zamfirescu[384]) 存在实数 α, β, γ，$0 \leqslant \alpha < 1$，$0 \leqslant \beta, \gamma < \frac{1}{2}$，使对任意 $x, y \in X$，下列不等式至少有一个成立：

(i) $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$.

(ii) $d(f(x),f(y))\leqslant\beta[d(x,f(x))-d(y,f(y))]$.

(iii) $d(f(x),f(y))\leqslant\gamma[d(x,f(y))+d(y,f(x))]$.

(20) 对任意 $x,y\in X,x\neq y$,都有

$$d(f(x),f(y))<\max\left\{d(x,y),\frac{[d(x,f(x))+d(y,f(y))]}{2},\frac{[d(x,f(y))+d(y,f(x))]}{2}\right\}.$$

(21) (Ciric[68])存在非负函数 q,r,s,t,满足

$$\sup_{x,y\in X}\{q(x,y)+r(x,y)+s(x,y)+2t(x,y)\}\leqslant\lambda<1,$$

使对任意$x,y\in X$,都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant q(x,y)d(x,y)+r(x,y)d(x,f(x))+s(x,y)d(y,f(y))+t(x,y)[d(x,f(y))+d(y,f(x))].$$

(22) 对任意 $x,y\in X,x\neq y$,都有

$$d(f(x),f(y))<\max\left\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y)),\frac{[d(x,f(y))+d(y,f(x))]}{2}\right\}.$$

(23) 存在 $(0,+\infty)$ 到 $[0,1)$ 内的单调递减函数 α_i 满足 $\sum_{i=1}^{5}\alpha_i(t)<1$,使对任意 $x,y\in X,x\neq y$,都有

$$\begin{aligned}&d(f(x),f(y))\\&\leqslant\alpha_1(d(x,y))d(x,f(x))+\alpha_2(d(x,y))d(y,f(y))\\&\quad+\alpha_3(d(x,y))d(x,f(y))+\alpha_4(d(x,y))d(y,f(x))\\&\quad+\alpha_5(d(x,y))d(x,y).\end{aligned}$$

(24) (Ciric[70])存在常数$h,0\leqslant h<1$,使对任意$x,y\in X$,都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant h\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y)),d(x,f(y)),d(y,f(x))\}.$$

(25) 对任意 $x,y\in X$, $x\neq y$, 都有

$$d(f(x),f(y))<\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y)),\\ d(x,f(y)),d(y,f(x))\}.$$

2. 各种定义的比较.

(i) (1)⇒(2)⇒(3)⇒(10); (2)⇏(1), (3)⇏(1), (10)⇏(3).

(ii) (2)⇒(8)⇒(23); (8)⇏(2).

(iii) (4)与(n)彼此无关, $n=1,2,3$.

(iv) (4)⇒(5)⇒(6)⇒(10), 其逆不真.

(v) (4)⇒(7)⇒(8)⇒(10); (7)⇏(4).

(vi) (7)⇒(9)⇒(10); (10)⇏(9).

(vii) (6)与(n)彼此无关, $n=7,8,9$.

(viii) (5)⇒(9), 其逆不真.

(ix) (n)⇏(5), $n=7,8$.

(x) (11)⇒(12)⇒(13)⇒(17), 其逆不真.

(xi) (11)⇒(14)⇒(15)⇒(17); (14)⇏(11).

(xii) (14)⇒(16)⇒(17); (17)⇏(16).

(xiii) (6)与(13)彼此无关.

(xiv) (1)⇒(18), (4)⇒(18); (11)⇒(18), 其逆不真.

(xv) (12)⇒(16), 其逆不真.

(xvi) (13)与(14) 彼此无关.

(xvii) (13)⇏(n), $n=16.18$—$21,24$.

(xviii) (10)与(13)彼此无关.

(xix) (10)⇏(n), $n=11,12$.

(xx) (10)⇒(25), (13)⇒(25), 其逆不真.

(xxi) (9)⇒(21), (6)⇒(22).

(xxii) (15)⇒(23), (16)⇒(24).

(xxiii) (16)与(21)彼此无关.

(xxiv) (17)$\Rightarrow$(25)，其逆不真.

(xxv) (18)$\Rightarrow$(19)$\Rightarrow$(20)$\Rightarrow$(22)$\Rightarrow$(25)；(20)$\nRightarrow$(19)，(25)$\nRightarrow$(22).

(xxvi) (19)$\Rightarrow$(21)$\Rightarrow$(24)$\Rightarrow$(25)； (24) $\nRightarrow$(21)， (25) $\nRightarrow$(24).

(xxvii) (18)$\Rightarrow$(23)$\Rightarrow$(25).

(xxviii) (21)$\Rightarrow$(22)，其逆不真.

3. 反例.

(i) (3)$\nRightarrow$(1). 参看例6.

(2)$\nRightarrow$(1). 定义 $\alpha:(0,+\infty)\to[0,1)$ 为 $\alpha(d)=\frac{1}{(d+1)}$，令 $f(x)=\frac{1}{(x+1)}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f:[0,1]\to[0,1]$ 上有一个不动点$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. 对任一固定的实数 a，$0<a<1$，选取 $y<-1+\frac{1}{a}$，且 $y\in\left(0,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$，则

$d(f(0),f(y))=\frac{y}{(y+1)}>ay=ad(0,y)$，故 f 不满足(1). 另一方面，对 $0\leqslant x<y\leqslant 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
d(f(x),f(y))&=\frac{(y-x)}{(x+1)(y+1)}\\
&\leqslant\frac{(y-x)}{(y-x+1)}\\
&=\alpha(d)d(x,y),
\end{aligned}
$$

故 f 满足(2).

(10)$\nRightarrow$(3). 令 $f(x)=\frac{x}{2}$，$0\leqslant x\leqslant 4$；$f(x)=-2x+10$，$4<x\leqslant 5$；则对任意 $0\leqslant x,y\leqslant 5$，$x\neq y$，都有

$$d(f(x),f(y))<\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y)),d(x,y)\},$$

即 f 满足(10). 另一方面,对 $x=4,y=5$,有

$$d(f(4),f(5))=2>1=d(4,5).$$

因此, f 不满足(3).

(ii) (8)$\nRightarrow$(2). 设 $f(x)=\frac{x}{3},0\leqslant x<1$, $f(1)=\frac{1}{6}$,则f满满(8)而不满足(2).

(iii) (4)$\nRightarrow$(n), $n=1,2,3$. 定义 $f(x)=\frac{1}{2}$, $0\leqslant x<1$, $f(1)=\frac{1}{4}$,则$f\in$(4). 但对任意$x\in\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$, 都有

$$d(f(x),f(1))=\frac{1}{4}>d(x,1).$$

因此,f 不满足(1)—(3).

(n)$\nRightarrow$(4), $n=1,2,3$. 令 $f(x)=\frac{x}{3},0\leqslant x\leqslant 1$,则 $f\in$(1),从而也有 $f\in$(2),$f\in$(3). 但 $f\notin$(4).

(iv) (5)$\nRightarrow$(4). 令 $f(x)=\frac{x}{3},0\leqslant x\leqslant 1$, 则 f 满足(5)而不满足(4).

(6)$\nRightarrow$(5). 设 $f(x)=\frac{x^2}{2(x+1)},0\leqslant x<+\infty$,对 $0\leqslant x<y$,有

$$d(f(x),f(y))=\frac{(xy+x+y)(y-x)}{2(x+1)(y+1)}$$

$$<\frac{y(y+2)}{2(y+1)}$$

$$=\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y))\}.$$

因此,$f\in$(6). 然而$d(f(0),f(y))=\frac{y^2}{2(y+1)}$. 对任意固定的 h,

$0<h<1$，可取充分大的 y，使 $\frac{y}{(y+2)}>h$. 因此，$f\notin(5)$.

(10)$\nRightarrow$(6). 取(i)中(10)$\nRightarrow$(3)的 f，即 $f(x)=\frac{x}{2}$，$0\leqslant x\leqslant 4$；$f(x)=-2x+10$，$4<x\leqslant 5$. 因对 $0<y\leqslant 4$，有

$$d(f(0),f(y))=\frac{y}{2}$$
$$=\max\{d(0,f(0)),d(y,f(y))\},$$

故 $f\notin(6)$.

(v) (7)$\nRightarrow$(4). 参看[255],p.122 上的例子.

(vi) 我们先证明(9)等价于

(9′)存在常数 h，$0<h<1$，使对任意 $x,y\in X$，都有

$d(f(x),f(y))\leqslant h\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y)),d(x,y)\}$.

(9)$\Rightarrow$(9′). 令

$M(x,y)=\max\{d(x,f(x)),d(y,f(y)),d(x,y)\}$.

设 $f\in(9)$，则

$$\begin{aligned}d(f(x),f(y))&\leqslant a(x,y)d(x,f(x))+b(x,y)d(y,f(y))\\&\quad+c(x,y)d(x,y)\\&\leqslant(a(x,y)+b(x,y)+c(x,y))M(x,y)\\&\leqslant\lambda M(x,y).\end{aligned}$$

因此，f 满足(9′)，这里取 $h=\lambda$.

(9′)$\Rightarrow$(9). 设 $f\in$ (9′). 对每一 (x,y)，若 $M(x,y)=d(x,f(x))$，令$a(x,y)=\lambda$，$b(x,y)=c(x,y)=0$；若$M(x,y)=d(y,f(y))$，令 $b(x,y)=\lambda$，$a(x,y)=c(x,y)=0$；若 $M(x,y)=d(x,y)$，令 $c(x,y)=\lambda$，$a(x,y)=b(x,y)=0$，则 $f\in(9)$.

(10)$\nRightarrow$(9). 我们只要指出 (10)$\nRightarrow$ (9′) 即可. 设

$f(x)=\frac{x^2}{(x+1)}$，$0\leqslant x<+\infty$，

则 $$d(f(x),f(y))=\frac{(xy+x+y)(y-x)}{(x+1)(y+1)}$$
$$<y-x.$$
因此 $f\in(10)$. 然而对任意固定的 $h,h<1$, 可取 y 充分大,使
$$d(f(0),f(y))=y^2(y+1)^{-1}>hy.$$
因此 $f\notin(9')$.

(vii) $(n)\nRightarrow(6),n=7,8,9$. 取 $f(x)=\frac{x}{2},0\leqslant x\leqslant 1$, 则 $f\in(7)$,从而 $f\in(8),f\in(9)$. 但
$$d(f(0),\ f(y))=\frac{y}{2}$$
$$=\max\{d(0,f(0)),d(y,f(y))\}.$$
故 $f\notin(6)$.

$(6)\nRightarrow(n)$, $n=7,8,9$. 设 $f(x)=\frac{1}{2},0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $f(x)=0,\frac{1}{2}<x\leqslant 1$;则 $f\in(6)$. 当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时,$d\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(x)\right)=\frac{1}{2}$.
令
$$g(x)=ad\left(\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right)+bd\ (x,\ f(x))+cd\ \left(\frac{1}{2},\ x\right)$$
$$=bx+c\left(x-\frac{1}{2}\right),$$
则当 $x\to\frac{1}{2}+0$ 时, $g(x)\to\frac{b}{2}\leqslant\frac{\lambda}{2}<\frac{1}{2}$. 因此,$f\notin(9)$, $f\notin(8)$, 且 $f\notin(7)$.

(viii) $(9)\nRightarrow(5)$. 令 $f(x)=\frac{x}{2},0\leqslant x\leqslant 1$,则 $f\in(9)$. 但对任何 $0\leqslant h<1$,都有
$$d(f(0),\ f(y))=\frac{y}{2}$$

$$=\max\{d(0,f(0)),d(y,\ f(y))\}>\frac{hy}{2},$$

故 $f\notin(5)$.

(ix) $(n)\nRightarrow(5)$, $n=7,8$. 取(vii)中$(n)\nRightarrow(6)$的f, 于是由(iv)知$(n)\nRightarrow(5)$.

(x) $(12)\nRightarrow(11)$. 令 $f(x)=0,0\leqslant x<1$, $f(1)=\frac{1}{2}$, 则 $f\in(12)$. 但因

$$d\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(1)\right)=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\left[d\left(\frac{1}{2},\ f(1)\right)+d\left(1,f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right]}{2}$$

故 $f\notin(11)$.

$(13)\nRightarrow(12)$. 令 $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)},x\geqslant0$,则 $f\in(13)$. 又

$d(f(x),\ f(2x))=\frac{x^2(2x+3)}{(2x+1)(x+1)}$. 当 $x>1$ 时, 有

$$\max\{d(x,f(2x)),\ d(2x,f(x))\}=\frac{x(x+2)}{(x+1)}.$$

于是,对于任意给定的 h,$0<h<1$,存在充分大的 x, 使

$\frac{x(2x+3)}{(2x+1)(x+2)}>h$, 因而 $f\notin(12)$.

$(17)\nRightarrow(13)$. 令 $f(x)=1-\frac{x}{2},0\leqslant x\leqslant1$, 则 $f\in(17)$. 但因

$$d(f(0),\ f(1))=\frac{1}{2}$$

$$=\max\{d(0,f(1)),d(1,f(0))\},$$

故 $f\notin(13)$.

(xi) (14)⇏(11). 取(x)中(12)⇏(11)的 f,此 $f\in(14)$.

(xii) (17)⇏(16). 可以证明(16)等价于

(16′)存在常数 h,$0\leqslant h<1$,使对任意$x,y\in X$,都有

$$d(f(x),f(y))\leqslant h\max\{d(x,f(y)),\ d(y,f(x)),\ d(x,\ y)\}.$$

现取(x)中(13)⇏(12)的 f,则 $f\in(17)$. 但因

$$d(f(x),f(2x))=\frac{x^2(2x+3)}{(2x+1)(x+1)},$$

而 $\max\{d(x,f(2x)),d(2x,f(x)),d(x,2x)\}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)}$,

故对任意给定的 h,$0\leqslant h<1$,当 x 充分大时，就有

$$\frac{x^2(2x+3)}{(2x+1)(x+1)}>\frac{h(x+2)x}{(x+1)},$$

故 $f\notin(16')$,即 $f\notin(16)$.

(xiii) (6)⇏(13). 令 $f(x)=a(1-x)$, $\frac{1}{2}<a<1$, $0\leqslant x\leqslant 1$,则 $f\in(6)$. 但

$$\begin{aligned}d(f(0),f(1))&=a\\&=\max\{d(0,f(1)),d(1,f(0))\},\end{aligned}$$

故 $f\notin(13)$.

(13)⇏(6). 令 $f(x)=\dfrac{x}{2}$,$0\leqslant x\leqslant 1$,则 f 满足(13), 但

$$\begin{aligned}d(f(0),\ f(y))&=\frac{y}{2}\\&=\max\{d(0,f(0)),d(y,f(y))\},\end{aligned}$$

故 f 不满足(6).

(xiv) (18)⇏(1). 取(iii) 中(4)⇏(1)的 f,则 $f\in(18)$.

(18)⇏(4). 取(v)中(7)⇏(4)的 f,则 $f\in(18)$.

(18)⇏(11). 取(x)中(12)⇏(11)的 f,此 $f\in(18)$.

(xv) (16)⇏(12). 取(x)中(17)⇏(13)的 f, 由于 (12)⇒

(13),故 $f\notin(12)$. 另一方面,易见 $f\in(16)$.

(xvi) (13) $\nRightarrow$ (14). 取 (xii) 中 (17) $\nRightarrow$ (16) 的 f. 易见 $f\in(13)$. 但因 $f\notin(16)$,故 $f\notin(14)$.

(14)$\nRightarrow$(13). 取(x)中(17)$\nRightarrow$(13)的 f,由(xiii)可知,此 f 满足条件(14).

(xvii) (13)$\nRightarrow$(n),$n=16,18—21,24$. 由(xxv)和(xxvi) 可知,我们只要证明(13)$\nRightarrow$(16),(13)$\nRightarrow$(22),(13)$\nRightarrow$(24)即可.

(13)$\nRightarrow$(16). 取(x)中(13)$\nRightarrow$(12)的 f, 由(xii), f 不满足(16).

(13)$\nRightarrow$(22). 取(xviii)中的 f,它满足(13),但不满足(10). 此 f 也不满足(22).

(13)$\nRightarrow$(24). 取(x)中(13)$\nRightarrow$(12)的 f, 因

$$\max\{d(x,2x),d(x,f(x)),d(2x,f(2x)),$$
$$d(x,f(2x)),d(2x,f(x))\}$$
$$=\frac{x(x+2)}{(x+1)},$$

故对任意给定的实数 h ,$0\leqslant h<1$,当 x 充分大时, 必有

$$d(f(x),\ f(2x))>\frac{hx(x+2)}{(x+1)},$$

故 $f\notin(24)$.

(xviii) (10)$\nRightarrow$(13). 取(xiii)中(6)$\nRightarrow$(13)的 f, 此 f 满足(10).

(13)$\nRightarrow$(10). 设 $f(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $f(x)=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$;则 $f\in(13)$. 但对 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, f 不满足 (10).

(xix) (10)$\nRightarrow$(n), $n=11,12$. 由(x), 只要指出(10)$\nRightarrow$(13)即可,这可由(xviii)得到.

(xx) (25)$\nRightarrow$(10). 设 $f(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $f(x)=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x\leqslant1$,则 f 满足(25)而不满足(10).

(25)$\nRightarrow$(13). 取(xviii)中(10)$\nRightarrow$(13)的 f,此 f 满足(25).

(xxiii) (21)$\nRightarrow$(16). 令 $f(x)=\varepsilon,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $f(x)=0$, $\frac{1}{2}<x\leqslant1$,这里$\frac{1}{4}<\varepsilon<\frac{1}{2}$,则 $f\in$(21). 但对 $x=\varepsilon,\ y=2\varepsilon$, f 不满足(16).

(16)$\nRightarrow$(21). 设 $f(x)=0,0\leqslant x<1,\ f(1)=\frac{1}{2}$,则 $f\in$(16). 但对 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, f 不满足(21).

(xxiv) (25)$\nRightarrow$(17). 设 $f(x)=\frac{1}{2}$; $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; $f(x)=0$, $\frac{1}{2}<x\leqslant1$, 则 $f\in$ (22), 从而由 (xxv) 可知 $f\in$ (25). 但对 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, f 不满足(17).

(xxv) (20)$\nRightarrow$(19). 可以证明,(19)等价于

(19′)存在常数 h,$0\leqslant h<1$,使对任意 $x,y\in X$,都有

$$d(f(x),\ f(y))\leqslant h\max\left\{d(x,y),\ \frac{[d(x,f(x))+d(y,f(y))]}{2},\ \frac{[d(x,f(y))+d(y,f(x))]}{2}\right\}.$$

现取 $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)}$, $x\geqslant0$, 则当 $x\neq y$ 时, $d(f(x),f(y))<d(x,y)$,故 $f\in$(20). 另一方面,对于 $x\geqslant1$,有

$$d(f(x), f(2x)) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)(2x+1)},$$

$$\max\left\{d(x,2x), \frac{[d(x,f(x))+d(2x,f(2x))]}{2}, \frac{[d(x,f(2x))+d(2x,f(x))]}{2}\right\} = x.$$

因此，对任意给定的 h，$0<h<1$，可取 x 充分大，使得

$$\frac{x(2x+3)}{(x+1)(2x+1)} > h.$$

因此，$f \notin (19')$，从而 $f \notin (19)$.

(25)$\nRightarrow$(22). 利用(xx)中的 f，则 $f \in (25)$ 而 $f \notin (22)$.

(xxvi) (24)$\nRightarrow$(21). 利用 (x) 中(12)$\nRightarrow$(11)的 f，则 $f \in (24)$，但 $f \notin (21)$.

(25)$\nRightarrow$(24). 取(xx)中的 f，它满足(25)而不满足(24).

(xxviii) (22)$\nRightarrow$(21). 设 $f(x)=\frac{1}{2}$，$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；$f(x)=0$，$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$，则 $f\in(22)$. 但对 $x=\frac{1}{2}$，$y>\frac{1}{2}$而又充分接近$\frac{1}{2}$时，f 不满足(21).

第十二章　Hilbert空间

引言

设U为实(或复)数域K上的线性空间，若对于U内任意一对元素x,y，恒对应于K中一数$\langle x,y\rangle$，满足(i) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$；(ii) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；(iii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；(iv) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$，则称$U$为实(或复)内积空间，简称为内积空间，$\langle x,y\rangle$称为$x,y$的内积.

赋范线性空间X成为内积空间的充要条件是它的范数满足

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2, \tag{1}$$

其中x,y是X中任意两个元素，(1)式称为中线公式.

内积空间是赋范的，因为内积定义范数$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. 关于这个范数的完备内积空间称为Hilbert空间，通常用字母H表示.

内积空间U中的元素x,y称为直交，是指x与y的内积等于0，即$\langle x,y\rangle=0$，记为$x\perp y$. 设M是U的一个子集，若x与M内的任一元素直交，则称x与M直交，记为$x\perp M$. 设N也是U的一个子集，如果对任意$x\in M$，有$x\perp N$，则称M与N直交，记为$M\perp N$. U中与M直交的元素的全体称为M的直交补，记为$M^{\perp}$.

Riesz直交分解定理　设M是完备内积空间U的闭子空间，则对任意的$x\in U$，可作如下唯一的直交分解：

$$x=x_0+y, \text{其中 } x_0\in M, y\in M^{\perp}.$$

元x_0称为元x在M上的直交射影.

令$Px=x_0$，则P为定义在U上的有界线性算子，称P为M上的直交射影算子，简称射影算子.

内积空间U中的子集$\{\varphi_\alpha\}$，$\alpha\in A$，如果满足

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ 1, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

则称$\{\varphi_\alpha\}$是U中的就范直交系. 设$\{\varphi_\alpha\}$是内积空间U中的一个就范直交系，如果对每个$x \in U$，Parseval 公式

$$\|x\|^2 = \sum_\alpha |\langle x, \varphi_\alpha \rangle|^2$$

成立，则称$\{\varphi_\alpha\}$是完备的. $\{\varphi_\alpha\}$称为完全的，是指U中不存在与所有φ_α直交的非零元素.

在 Hilbert 空间中，完全的就范直交系的势称为该空间的直交维数，简称维数.

Riesz表现定理 对于完备内积空间U上的每一个有界线性泛函f，必存在唯一的$u \in U$，使$f(x) = \langle x, u \rangle$，$\|u\| = \|f\|$.

反之，对任一$u \in U$，由等式$f(x) = \langle x, u \rangle$唯一地定义了$U$上的一个有界线性泛函$f$，满足$\|f\| = \|u\|$.

对内积空间U上的每个有界线性算子T，存在唯一的算子T^*，称为算子T的共轭算子，使得任意的$x, y \in U$，满足等式$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. 算子$T$与$T^*$的范数相同. 如果$T = T^*$，则称$T$为自伴算子或自共轭算子.

在第三章中，对于 Banach 空间的有界线性算子，曾引进过共轭算子的概念. 但现在的共轭算子与那里稍有不同. 这里当$S, T \in L(U)$，α, β是复数时$(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$，按过去的共轭算子的概念应为$(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$. 但在实空间中二者是完全一致的.

显然，T为自伴算子的充要条件是对任何$x, y \in U$，有

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

我们称满足上式的有界线性算子T为对称的. 于是，对于有界线性算子T而言，T为自伴算子的充要条件是T为对称的.

我们再引入无界线性算子的共轭算子概念. 设T是定义在

Hilbert 空间H的稠密线性子空间上，而取值于H中的无界线性算子，即T的定义域$D(T)$是H的线性子空间，而且$\overline{D(T)}=H$。如$y\in H$是这样的一个元素，对应于它，有一个元素$y^*\in H$，使得等式$\langle Tx, y\rangle=\langle x, y^*\rangle$对于所有的$x\in D(T)$都成立，则$y^*$由$y$唯一地确定，并且由$y^*=T^*y$给定了一个算子$T^*$，称它为算子$T$的共轭算子．若$T=T^*$，则称$T$为自伴算子或自共轭算子．若$\langle Tx, y\rangle=\langle x, Ty\rangle$，则称$T$为对称算子．

设S，T是内积空间U上的有界线性算子，若存在U上的有界线性算子A，它有逆算子A^{-1}，且$S=A^{-1}TA$，则称算子S与T是相似的．

设A是内积空间上的有界线性算子，若A^{-1}存在且$A^{-1}=A^*$，则称A为酉算子。设S，T都是内积空间上的有界线性算子，若存在酉算子A，使得$S=A^{-1}TA$或$T=ASA^{-1}$，则称S与T是酉等价的．

关于 Hilbert 空间的更多的材料，可参看[318]。

1．不可分的Hilbert空间．

设Γ为一不可数的实数集，$l^2(\Gamma)$代表定义在Γ上的具有如下性质的实值函数$x(\gamma)$的全体，使得$\{\gamma\in\Gamma: x(\gamma)\neq 0\}$至多为一可数集，且满足

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)|^2<+\infty.$$

我们在$l^2(\Gamma)$上定义通常的线性运算，并定义内积为

$$\langle x, y\rangle=\sum_{\gamma\in\Gamma}x(\gamma)y(\gamma),$$

则$l^2(\Gamma)$为Hilbert 空间，但它并不可分．

2．一个自共轭空间，它不是内积空间．

Banach 空间U称为自共轭的，是指存在由U到U^*上的一对一的有界线性算子T，并且$\|T\|=\|T^{-1}\|=1$。

由 Riesz 表现定理可知，每个完备的内积空间都是自共轭空间. 然而自共轭空间不必是内积空间. 下面的例子是由Lorch给出的.

设 $l_n^p(1<p<+\infty)$是由一切有序数组 $x=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 所组成的线性空间. 令

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 l_n^p为 Banach 空间. 令 $E=(l_n^p)\oplus(l_n^q),p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，对 $(x,y)\in E$,令

$$\|(x,y)\|=(\|x\|_p^2+\|y\|_q^2)^{\frac{1}{2}},$$

则E是一个 Banach 空间,且

$$E^*=(l_n^p)^*\oplus(l_n^q)^*=(l_n^q)\oplus(l_n^p).$$

令 $T(x,y)=(y,x)$,那么T是由E到E^*上的一对一的有界线性算子,并且$\|T\|=\|T^{-1}\|=1$,因此E是自共轭空间. 不难证明,对于E,中线公式不成立,从而E不是内积空间.

3. 等式$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$不蕴涵 $x\perp y$ 的内积空间.

容易证明,若内积空间U中 $x\perp y$,即$\langle x,y\rangle=0$,则必有

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

反之,若U是实内积空间,则上式蕴涵 $x\perp y$. 应当注意,对于复内积空间,这一命题并不成立. 例如,在复二维内积空间U中取$x=(1,1),y=(i,i)$,则

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{2}\xi_k\bar{\eta}_k=-2i,$$

故 x 与 y 并不直交. 但

$$\begin{aligned}&\langle x+y,x+y\rangle-\|x\|^2-\|y\|^2\\&=\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=0,\end{aligned}$$

即等式$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$成立.

4. 存在某个赋范线性空间，其范数不能由内积得到.

取 Banach 空间 l^p $(1\leqslant p\leqslant+\infty,\ p\neq 2)$，并取 $x=(1,1,0,\cdots)\in l^p$，$y=(1,-1,0,\cdots)\in l^p$，经过简单的计算，得

$$\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}},\quad \|x+y\|=\|x-y\|=2,$$

可见当 $p\neq 2$ 时，l^p 上的范数不满足中线公式，从而这个范数不能由内积得到.

5. 存在某个内积空间，它不是 Hilbert 空间.

考虑线性空间 $l^p(1\leqslant p<2)$，对 $x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}\in l^p$，令

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n.$$

由于 $l^p\subset l^2(1\leqslant p<2)$，故由 Hölder 不等式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\overline{\eta}_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n$ 是收敛的. 易见，$\langle x,y\rangle$ 是 l^p 上的一个内积，从而 l^p 为一内积空间，但因 l^p 不完备，故它不是 Hilbert 空间.

6. Hilbert 空间中的一个非空闭集 M，使 M 中不存在最小范数的元素.

设 $\{\varphi_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的无限就范直交子集，令 $M=(x_1,x_2,\cdots)$，其中 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi_n$，$n=1,2,\cdots$. 当 $n\neq m$ 时，有

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi_n-\left(1+\frac{1}{m}\right)\varphi_m\right\|^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{1}{m}\right)^2>2.$$

于是，若 $\{y_n\}\subset M$ 且 $y_n\to y(n\to\infty)$，则当 n 充分大后，都有 $y_n=y$，所以 $y\in M$，即 M 是闭集. 但因 $\|x_n\|^2=1+\frac{1}{n}$，故 M 中没有最小

范数的元素.

注 容易证明,若M是 Hilbert 空间H中的非空闭凸子集,如果$x\in H$,则存在唯一的元素$y_0\in M$而有$\|x-y_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$. 上述反例说明了在这个命题中$M$是凸集的条件不可去掉.

7. 有限维Hilbert 空间中的一个非空闭集 M,使 M中存在不唯一的最小范数的元素.

容易证明,对于有限维 Hilbert 空间H中的非空闭集M,在M中一定存在最小范数的元素. 但这种元素不必唯一. 例如,设$H=\mathbf{R}^1$,$M=\{-1,1\}$,则对$x=0$,恒有$\|x-y_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$,其中$y_0=-1$或1,即$y_0$不唯一.

8. 存在某个内积空间中的两个直交的闭子空间 M_1, M_2,使 $M_1\oplus M_2$不闭.

设H是 Hilbert 空间,M_1,M_2是H的两个闭子空间,使$M_1\cap M_2=\{0\}$,$M_1\perp M_2$,则$M_1\oplus M_2$必为H的闭子空间(参看[318],p.32). 应当注意,对于一般的内积空间,这个命题并不成立. 例如,设$U=\{x:x\in C[-1,1]\}$,对$x,y\in U$,令

$$\langle x,y\rangle=\int_{-1}^{1}x(t)\overline{y(t)}dt,$$

并令 $M_1=\{x\in U:\text{当 } t\leqslant 0 \text{ 时 } x(t)=0\}$,

$M_2=\{x\in U:\text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时 } x(t)=0\}$,

则M_1和M_2皆为内积空间U的闭子空间,而且$M_1\cap M_2=\{0\}$,$M_1\perp M_2$.

兹证$M_1\oplus M_2=\{x+y:x\in M_1,y\in M_2\}$不闭. 为此,设$x(t)\equiv 1$,又设

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ nt, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{n},\\ 1, & \dfrac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$y_n(t)=\begin{cases}1, & -1\leqslant t\leqslant -\frac{1}{n},\\ -nt, & -\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 0,\\ 0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $x_n+y_n\in M_1\oplus M_2$，且

$$\int_{-1}^{1}|x(t)-x_n(t)-y_n(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{n}}^{0}|1+nt|^2dt+\int_{0}^{\frac{1}{n}}|1-nt|^2dt$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty).$$

因此 $x\in\overline{M_1\oplus M_2}$。但 $x\in U$，而 $x\notin M_1\oplus M_2$，故 $M_1\oplus M_2$ 不闭。

9. 存在某个内积空间中的两个子空间 M_1、M_2，使 $M_1\perp M_2$，而 $\overline{M}_1\oplus\overline{M}_2\neq\overline{M_1\oplus M_2}$。

设 H 是 Hilbert 空间，M_1，M_2 是 H 的两个子空间，使 $M_1\perp M_2$，则 $\overline{M}_1\oplus\overline{M}_2=\overline{M_1\oplus M_2}$。对于一般的内积空间中的两个直交子空间 M_1、M_2，则有 $\overline{M}_1\oplus\overline{M}_2\subset\overline{M_1\oplus M_2}$（参看[318]，p.34），而不必有 $\overline{M}_1\oplus\overline{M}_2=\overline{M_1\oplus M_2}$。例如，例 8 中的内积空间 U 与子空间 M_1，M_2 具有所需的性质。

10. 存在某个 Hilbert 空间 H 中的闭子空间 M 及直交射影算子 P，使 $P(M)$ 不是 H 的闭子空间。

设 $H=l^2$，M 是由 H 中的一切形如 $(\xi_1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ 2\xi_2,\ \xi_3,\ 3\xi_3,\ \cdots)$ 的元素所组成的子空间，N 是由 H 中的一切形如 $(0,\eta_1,0,\eta_2,0,\eta_3,\cdots)$ 的元素所组成的子空间。P 是由 H 到 $N^{\perp}$ 上的直交射影算子。易见，M 是 H 的闭子空间。然而 $P(M)$ 不是 H 的闭子空间，因为不能由 $P(x_n)\in P(M)$ 且 $P(x_n)\to P(x)$ $(n\to\infty)$ 推出 $P(x)\in P(M)$。

11. 内积空间中弱收敛而不范数有界的点列.

设 H 是可分的 Hilbert 空间，$\{\varphi_n\}$是H中的完全的就范直交系，U 是一切有限线性组合 $\sum_i \alpha_i\varphi_i$ 所组成的线性空间，其中α_i均为复数，则对每一 $g\in U$，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle n\varphi_n, g\rangle = 0 = \langle 0, g\rangle.$$

因此，$\{n\varphi_n\}$弱收敛于 0，但 $\|n\varphi_n\| = n$，故$\{n\varphi_n\}$并不范数有界.

注 若U完备，则U中的弱收敛点列必定范数有界（参看[333]，p. 155）. 上述反例说明了在这个命题中空间U完备的条件不可去掉.

12. 内积空间中完全而不完备的就范直交系.

设U为$[0,1]$上(R)可积函数的全体，定义线性运算如常，对 $x, y\in U$，令

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt,$$

则 U 为一内积空间. 显然，U 的完备化空间为 $L^2[0,1]$.

设 C 为$[0,1]$中具有正测度的 Cantor 集，$\chi_C(t)$ 为C的特征函数. 在$[0,1]$上定义函数$\varphi_0(t) = \dfrac{\chi_C(t)}{\sqrt{mC}}$，则$\varphi_0\in L^2[0,1]$，$\|\varphi_0\| = 1$ 且

$$\langle 1, \varphi_0\rangle = \int_0^1 \varphi_0(t)dt = \sqrt{mC}\ .$$

由于φ_0的不连续点的全体C具有正测度，故φ_0在$[0,1]$上不(R)可积，即$\varphi_0\notin U$，且若 $x(t)=\alpha\varphi_0(t)\ (\alpha\neq 0)$在$[0,1]$上几乎处处成立，则$x$在$[0,1]$上亦不$(R)$可积. 记

$$E = \{y:\langle y, \varphi_0\rangle = 0, y\in L^2[0,1]\},$$

并设$\{x_n\}$为有理系数多项式的全体. 对每一个x_n，作函数（多项式）

$$y_n(t) = x_n(t) - \frac{\langle x_n, \varphi_0\rangle}{\sqrt{mC}}\quad (n=1,2,\cdots),$$

则

$$\langle y_n,\varphi_0\rangle=\langle x_n,\varphi_0\rangle-\frac{\langle x_n,\varphi_0\rangle\langle 1,\varphi_0\rangle}{\sqrt{mC}}=0,$$

因而$\{y_n\}\subset E$. 兹证$\{y_n\}$在E中稠密. 事实上，由于$\{x_n\}$在$L^2[0,1]$中稠密，因而对任一$y\in E$，必有$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，使得

$$\|x_{n_k}-y\|\to 0\quad (k\to\infty).$$

因为$\langle x_{n_k},\varphi_0\rangle=\langle x_{n_k}-y,\varphi_0\rangle$，故

$$\|y_{n_k}-y\|=\left\|x_{n_k}-y-\frac{\langle x_{n_k}-y,\ \varphi_0\rangle}{\sqrt{mC}}\right\|$$

$$\leqslant\|x_{n_k}-y\|+\frac{\|x_{n_k}-y\|}{\sqrt{mC}}\to 0$$

$$(k\to\infty).$$

即$\{y_n\}$在E中稠密.

对$\{y_n\}$施行就范直交化手续，即可得E中完全的就范直交系$\{\varphi_n\}$. 由于每个φ_n是某些y_n的线性组合，从而φ_n也是多项式. 因此，对每一n，均有$\varphi_n\in U$.

兹证$\{\varphi_n\}$是U中完全而不完备的就范直交系. 事实上，对任一$x\in L^2[0,1]$，$\|x\|\neq 0$，若$\langle x,\varphi_n\rangle=0(n=1,2,\cdots)$，则

$$\langle x-\langle x,\varphi_0\rangle\varphi_0,\varphi_0\rangle=\langle x,\varphi_0\rangle-\langle x,\varphi_0\rangle\|\varphi_0\|^2=0,$$

故$x-\langle x,\varphi_0\rangle\varphi_0\in E$且

$$\langle x-\langle x,\varphi_0\rangle\varphi_0,\varphi_n\rangle=\langle x,\varphi_n\rangle-\langle x,\varphi_0\rangle\langle\varphi_0,\varphi_n\rangle=0.$$

由于$\{\varphi_n\}$是E中的完全直交系，故$x-\langle x,\varphi_0\rangle\varphi_0=0$在$[0,1]$上几乎处处成立，即$x=\langle x,\ \varphi_0\rangle\varphi_0$在$[0,\ 1]$上几乎处处成立. 而$\langle x,\varphi_0\rangle^2=\|x\|^2>0$，故$\langle x,\varphi_0\rangle\neq 0$，从而$x\notin U$. 这说明若$x\in U$，$\langle x,\varphi_n\rangle=0(n=1,2,\cdots)$，则必有$x=0$，即$\{\varphi_n\}$为$U$中的完全直交系. 但对任何$x\in U$，只要$\langle x,\varphi_0\rangle\neq 0$(例如可取$x(t)\equiv 1$)，就有

$$\|x\|^2\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle^2=\langle x,\varphi_0\rangle^2+\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle^2$$

$$>\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle^2,$$

因此，直交系$\{\varphi_n\}$在U中并不完备.

注 设H是可分的 Hilbert 空间，$\{\varphi_n\}$是H中的一个就范直交系，则$\{\varphi_n\}$的完备性与完全性等价(参看[14]，pp.175—176)．上述反例表明，对于不完备的内积空间，就范直交系的完备性与完全性并不等价．此时可以证明，完备的就范直交系必是完全的，其逆不真.

13．某个内积空间的完全直交系，它在该空间的完备化空间中并不完全.

考虑例 12 中的内积空间U，完全直交系$\{\varphi_n\}$及函数φ_0．由于$\varphi_0\in L^2[0,1]$，$\varphi_0\neq0$，而且$\langle\varphi_0,\varphi_n\rangle=0(n=1,2,\cdots)$，故$\{\varphi_n\}$不是$U$的完备化空间$L^2[0,1]$中的完全直交系.

14．存在一个内积空间的闭子空间，使 Riesz 直交分解定理不成立.

设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$是可分 Hilbert 空间$H$中的完全的就范直交系，

$p=\sum\limits_{i=2}^{\infty}\gamma_i\varphi_i$是$H$中的一个固定的点，其中$\sum\limits_{i=2}^{\infty}|\gamma_i|^2<+\infty$，且有无穷多个$i$使$\gamma_i\neq0$，此外，令$q=\varphi_1+p$.

设M是一切形如$\sum\limits_{i\neq1}\alpha_i\varphi_i$的有限线性组合所成的线性空间，

而U为一切形如$\alpha q+g$的元素的全体，其中α是任意复数，而$g\in M$。不难证明，$p\notin U$．事实上，假若$p\in U$，则有$p=\alpha q+g$，即

$$\sum_{i=2}^{\infty}\gamma_i\varphi_i=\alpha\varphi_1+\alpha p+g.$$

由于 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 线性无关，因而 $\alpha=0$. 于是得到 $g=\sum\limits_{i=2}^{\infty}\gamma_i\varphi_i\in M$. 这与有无穷多个 i 使 $\gamma_i\neq 0$ 相矛盾. 因此 $p\notin U$. 由于 $p\notin U$，而由 U 的定义可知 $q\in U$，从而由关系式 $p=q-\varphi_1$ 得到 $\varphi_1\notin U$.

兹证 U 在 H 中稠密. 事实上，任取 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i\varphi_i\in H$，令

$$h_n=\beta_1 q+\sum_{i=2}^{n}(\beta_i-\beta_1\gamma_i)\varphi_i,$$

则 $h_n\in U$. 因为 $\beta_1 q=\beta_1\left(\varphi_1+\sum\limits_{i=2}^{\infty}\gamma_i\varphi_i\right)=\beta_1\varphi_1+\beta_1\sum\limits_{i=2}^{\infty}\gamma_i\varphi_i$，所以

$$\begin{aligned}x-h_n&=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\varphi_i-\sum_{i=2}^{\infty}\beta_1\gamma_i\varphi_i-\beta_1\varphi_1\\&\quad-\sum_{i=2}^{n}(\beta_i-\beta_1\gamma_i)\varphi_i\\&=\sum_{i=n+1}^{\infty}(\beta_i-\beta_1\gamma_i)\varphi_i,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|x-h_n\|&\leqslant\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\beta_i\varphi_i\right\|+\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\beta_1\gamma_i\varphi_i\right\|\\&=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\beta_1\gamma_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\\&\qquad(n\to\infty),\end{aligned}$$

则 U 在 H 中稠密.

再证M是U的闭子空间．为此，设$g_n\in M$，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n=g_0$，要证$g_0\in M$．据$M$的定义，有$\langle\varphi_1, g_n\rangle=0(n=1, 2, \cdots)$，因而$\langle\varphi_1, g_0\rangle=0$．因为$g_0\in U$，故$g_0$可表为形如$\alpha q+g$的形式：

$$g_0=\alpha q+g=\alpha\varphi_1+\alpha p+g.$$

故由$\langle\varphi_1,g_0\rangle=0$得到$\alpha=0$，因而$g_0=g\in M$．

因为在H中，直交于M的元素仅是$\beta\varphi_1$(β是复数)，这些元素均不属于U，故U中直交于M的元素仅是零元．于是对于$q\in U$而言，不能分解成

$$q=x_0+y \quad (q\notin M),$$

其中$x_0\in M$，$y\in M^{\perp}$．

注 Riesz 直交分解定理是说：如果M是完备内积空间U的闭子空间，则对任意的$x\in U$，可作下列唯一的直交分解：

$$x=x_0+y，其中\ x_0\in M,y\in M^{\perp}.$$

应当注意的是，Riesz 直交分解定理中U的完备性可以去掉，但要保证M是U的完备子空间(参看[14]，p.168)．上述反例表明若U不完备，M又不是U的完备子空间，则 Riesz 直交分解定理不成立．

又，若$\{\varphi_n\}$是内积空间U中完全而不完备的就范直交系，则$M=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_n\}}\neq U$(参看[14]，pp.173—174)，$M^{\perp}=\{0\}$．于是对$x\in U\backslash M$而言，就不能分解成

$$x=x_0+y \quad (x_0\in M,y\in M^{\perp}).$$

15．Riesz 表现定理不成立的内积空间．

考虑例 14 中的内积空间U及闭子空间M，则$M^{\perp}=\{0\}$，据 Hahn-Banach 定理的推论，存在U上的非零连续线性泛函f，使当$x\in M$时，$f(x)=0$，而当$x\notin M$时，$f(x)\neq0$．假若存在唯一的$u\in U$(因$f\neq0$，故$u\neq0$)，使

$$f(x)=\langle x,u\rangle, \quad \|u\|=\|f\|,$$

则当$u\in U\backslash M$时，对一切$x\in M$有

$$f(x)=\langle x,u\rangle=0,$$

此与U中仅有零元与M直交相矛盾．而当$x\in M$时，由$f(u)=\langle u,u\rangle=0$得到$u=0$，此与$u\neq 0$相矛盾．因此，不存在唯一的$u\in U$，使$f(x)=\langle x,u\rangle$.

注　对于完备内积空间U上的每一连续线性泛函f，必存在唯一的$u\in U$使$f(x)=\langle x,u\rangle$，$\|u\|=\|f\|$．反之，对任一$u\in U$，由等式$f(x)=\langle x,u\rangle$唯一地定义了U上的一个连续线性泛函f，满足$\|f\|=\|u\|$（参看[14]）．上述反例表明当内积空间不完备时，这一命题不再成立.

16．某个 Hilbert 空间中的线性稠密点列，它不是基.

函数列$\{\varphi_n\}$称为复 Hilbert 空间$L^2[-\pi,\pi]$的基，是指对任一$x\in L^2[-\pi,\pi]$，存在唯一的复数列$\{a_n\}$，使

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-\sum_{n=-N}^{N}a_n\varphi_n(t)\right|^2dt=0.$$

易见，若$\{\varphi_n\}$是$L^2[-\pi,\pi]$的基，则$\{\varphi_n\}$在$L^2[-\pi,\pi]$中线性稠密，即$\overline{\operatorname{span}}\{\varphi_n\}=L^2[-\pi,\pi]$．然而逆命题并不成立．下面的例子是由 Byrnes[61] 作出的.

令$\varphi_n(t)=(1+e^{it})e^{int}$，$n=0$，$\pm1$，$\cdots$，易见，$\{\varphi_n\}$在$L^2[-\pi,\pi]$中线性稠密.

兹证$\{\varphi_n\}$不是$L^2[-\pi,\pi]$的基．为此，只要证明对$x(t)\equiv 1$而言，不存在唯一的复数列$\{a_n\}$，使

$$A_M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-M}^{M}a_n\varphi_n(t)-1\right|^2dt$$

$$\to 0(M\to\infty).$$

反设存在唯一的适合上述条件的复数列$\{a_n\}$．令$a_0+a_{-1}=\alpha+\beta i$，其中$\alpha,\beta$均为实数，则

$$A_M=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-(M-1)}^{M}(a_n+a_{n-1})e^{int}\right.$$

$$+a_{-M}e^{-iMt}+a_Me^{i(M+1)t}-1\Big|^2dt$$

$$=\sum_{n=-(M-1)}^{M}|a_n+a_{n-1}|^2-(\alpha+\beta i)+|a_{-M}|^2$$

$$+|a_M|^2-(\alpha-\beta i)-1$$

$$=\sum_{\substack{n=-(M-1)\\ n\neq 0}}^{M}|a_n+a_{n-1}|^2+|a_{-M}|^2+|a_M|^2$$

$$+(\alpha-1)^2+\beta^2$$

$$\geqslant(\alpha-1)^2+\beta^2\geqslant 0.$$

因为 $A_M\to 0(M\to\infty)$，故由上面的不等式推知 $\alpha=1$，$\beta=0$．因此，

$$A_M=\sum_{n=-(M-1)}^{M}|a_n+a_{n-1}|^2+|a_{-M}|^2+|a_M|^2.$$

于是，由 $A_M\to 0$ 推知 $\lim\limits_{M\to\pm\infty}a_M=0$，$a_n+a_{n-1}=0(n\neq 0)$．由此可知，数列 $\{a_n\}$ 必须满足下述条件：

$$a_n+a_{n-1}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$$

$$\lim_{M\to\pm\infty}a_M=0.$$

显然，这些条件不能同时成立．因此，适合上述条件的 $\{a_n\}$ 并不存在，即 $\{\varphi_n\}$ 不是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的基．

17．Hilbert 空间中广义基与共轭广义基互不包含．

设 X 为 Banach 空间，令 $B=\{(x_\alpha,\ y_\alpha):\alpha\in A\}\subset X\times X^*$，其中 (x_α,y_α) 适合条件：

$$y_\beta(x_\alpha)=\delta_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Arsove 和 Edwards 称 B 为广义基，是指

$$\{x_\alpha:\alpha\in A\}\text{在}X\text{中线性稠密}. \tag{2}$$

Davis称B为共轭广义基，是指

$$\{y_\alpha:\alpha\in A\}\text{在}X^*\text{中线性稠密.} \tag{3}$$

Tapia[306]于 1971 年提出下述问题：在Hilbert空间中，这两种基的概念是否一致？Klein[177]于 1973 年指出，一般说来，这两种基的概念互不包含，他的例子如下：

在 Hilbert 空间 l^2 中，令 $x_n=(0,\cdots,0,\underset{(n+1)\text{位}}{1},0,\cdots)$，$y_n=(1,0,\cdots,0,\underset{(n+1)\text{位}}{1},0,\cdots)$. 由于 l^2 的共轭空间就是它本身，故 $B=\{(x_n,y_n):n=1,2,\cdots\}$满足条件(1)，但(2)不成立，这是因为$(1,0,0,\cdots)$与所有的$x_n$直交，从而$\{x_n\}$在$l^2$中并不线性稠密. 又因为若 $b=(b_1,b_2,\cdots)$ 与所有的 y_n 直交，则 $b_n=-b_1(n=2,3,\cdots)$，而 $b_n\to 0(n\to\infty)$，从而 $b=(0,0,\cdots)$，即(3)成立. 因此，B 是 l^2 的共轭广义基，但不是广义基.

其次，由上面的讨论可知，$B'=\{(y_n,x_n):n=1,2,\cdots\}$ 是 l^2 的广义基，而不是共轭广义基.

18. 任给势 K，可构造一个 K 维的 Hilbert 空间.

设Q为一集，其势为K，则$l^2(Q)$为Hilbert空间. 对每一$p\in Q$，设x_p是这样定义的函数，当 $p\neq q$ 时，$x_p(q)=0$，而 $x_p(p)=1$. 所有 x_p 的集是一个就范直交集. 显然，它的势与集Q的势是相同的. 其次，由所有 x_p 构成的就范直交集是完全的，这是因为如果 $x\in l^2(Q)$，则由内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{q\in Q}x(q)\overline{y(q)}$$

可知，$\langle x,x_p\rangle=x(p)$，于是由范数的定义得到

$$\|x\|^2=\sum_{p\in Q}|\langle x,x_p\rangle|^2.$$

因此就范直交集$\{x_p:p\in Q\}$是完备的，从而也是完全的. 于是，$l^2(Q)$是K维的Hilbert空间.

注 可以证明，若Hilbert空间H的直交维是无限的，则H的线性维(即Hamel基的势)$\geqslant 2^{\aleph_0}$. 这个结果就是在Hilbert空间理论中线性维的概念不甚重要的主要理由. 在Hilbert空间中涉及的维总是指直交维.

19. 存在某个无穷维 Hilbert 空间，它是一个具有单位元素的代数.

赋范线性空间X，其中如定义有下列性质的映射$X\times X\to X$，$(x,y)\to xy$(乘法)，则称为赋范代数：(i) $x(yz)=(xy)z$; (ii) $(x+y)z=xz+yz$, $x(y+z)=xy+xz$; (iii) $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$; (iv) $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$.

如果赋范线性空间X是完备的，则此代数称为 Banach代数. 如果赋范代数中存在元e(单位)满足：$xe=ex=x$, $\|e\|=1$，则称为具有单位元素的代数.

是否存在无穷维 Hilbert 空间，它是一个具有单位元素的代数? Shields 对此问题作出了肯定的回答. 他的例子如下：

设H是定义在区间$[0,1]$上的绝对连续函数且其导数(绝对连续函数几乎处处可微)属于$L^2[0,1]$的全体，并在H上定义通常的线性运算. 对$x,y\in H$，令

$$\langle x,y\rangle=x(0)\overline{y(0)}+\int_0^1 x'(t)\overline{y'(t)}\,dt.$$

若$\|x\|=0$，则$x(0)=0$，$\int_0^1|x'(t)|^2dt=0$，从而$x'(t)$几乎处处等于0. 因此，$x(t)$为一常值函数. 再由$x(0)=0$得到$x(t)\equiv 0$. 所以$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，且$\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$. 又，显然有$\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$，$\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle$，$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$. 因此，$\langle x,y\rangle$是内积，从而$H$为内积空间.

任取H中的Cauchy列$\{x_n\}$，则$\{x_n(0)\}$是Cauchy数列，而$\{x_n'\}$是$L^2[0,1]$中的Cauchy列. 因此，存在复数α及函数$y\in L^2[0,1]$，使$x_n(0)\to\alpha$，$x_n'\to y(n\to\infty)$. 令

$$x(t)=a+\int_0^t y(s)ds,$$

因为可积函数的不定积分是绝对连续的，故 $x\in H$，且$\{x_n\}$在H中收敛于x. 因此，H是一个Hilbert 空间.

若$x,y\in H$，则 x,y 都是有界函数，从而

$$(xy)'=xy'+x'y\in L^2[0,1],$$

可见$xy\in H$. 又，$x(t)\equiv 1$ 显然属于H，故H即为所求的Hilbert空间.

20. 存在某个 Hilbert 空间H上的有界线性算子T，虽对一切$x\in H$都有$\langle Tx,x\rangle=0$，但 $T\neq 0$.

容易证明，若T是复内积空间U上的有界线性算子，且对每个$u\in U$都有$\langle Tu,u\rangle=0$，则 $T=0$. 对于实内积空间而言，这一命题并不成立. 例如，考虑二维实欧氏空间$\mathbf{R}^2$，对 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$，令

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i.$$

设T是旋转变换

$$\begin{cases} y_1=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta,\\ y_2=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta,\end{cases}$$

其中θ为某一固定角，则T是$\mathbf{R}^2$到其自身的一个有界线性算子. 又

$$\begin{aligned}\langle Tx,x\rangle&=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)x_1+(x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)x_2\\&=x_1^2\cos\theta+x_2^2\cos\theta.\end{aligned}$$

若取$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则对每一$x\in\mathbf{R}^2$，都有$\langle Tx,x\rangle=0$，但$T\neq 0$.

21. 存在某个 Hilbert 空间H上的无界线性算子，它限制在H的某个完全直交系上是有界的.

设$\{\varphi_n\}$是可分无穷维 Hilbert 空间H的完全的规范直交系，A

是H的包含$\{\varphi_n\}$的Hamel基．由于H是无穷维的，故H的Hamel基A的势$\geqslant \aleph$（参看[126]，pp. 170—171），因而可取$a\in A$使$a\neq\varphi_n$ $(n=1,2,\cdots)$．在H上定义一个线性算子T，使适合$Ta=a$，$Tx=0(x\in A, x\neq a)$，于是特别有$T\varphi_n=0(n=1,2,\cdots)$，所以$T$限制在$\{\varphi_n\}$上是有界的．

兹证T在H上是无界的．反设T在H上有界，那么由于$\{\varphi_n\}$是H的完全的就范直交系，故它也是H的Schauder基（参看[326]，p. 129）．因此对任一$x\in H$，可唯一地表成

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n,$$

于是由T的有界性及$T\varphi_n=0$得到$Tx=0$，因此$T=0$，这与$Ta=a$发生矛盾．

注 例21说明了有界性对于线性算子而言是一个很强的条件，仅仅知道线性算子T在完全的就范直交系上有界，还不足以保证T有界．

22．任给可分无穷维Hilbert空间的完全的就范直交系与实数A，可构造一个线性算子T，使$\|T\|\geqslant A$，T限制在这个直交系上的范数不超过1．

设$\{\varphi_n\}$是可分无穷维Hilbert空间H的完全的就范直交系，任意取定正整数m，定义算子T（依赖于m）如下：

$$Tx=\langle x,\varphi_1+\cdots+\varphi_m\rangle\varphi_1,$$

于是

$$T\varphi_n=\begin{cases}\varphi_1, & n\leqslant m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$$

由此得到$\|T\varphi_n\|\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$．由于

$$T^*x=\langle x,\varphi_1\rangle(\varphi_1+\cdots+\varphi_m),$$

因而$T^*\varphi_1=\varphi_1+\cdots+\varphi_m$，从而得到

$$\|T\|=\|T^*\|\geqslant\|T^*\varphi_1\|=\|\varphi_1+\cdots+\varphi_m\|$$
$$=\sqrt{m}.$$

23. 存在某个双线性泛函 $\varphi(x,y)$，使 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi(x,x)|<+\infty$，而 φ 并不连续.

容易证明，若 φ 是复内积空间 U 上的双线性泛函，使 $\sup\limits_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)|<+\infty$，则 φ 连续．于是自然产生问题：对于实内积空间，这一命题是否成立？我们将指出，一般说来，这一命题不成立．

为此，令内积空间 $U=\left\{\{x_n\}: x_n \text{ 为实数}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}|nx_n|^2<+\infty\right\}$，其中内积定义为

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n.$$

又令

$$\varphi(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{k=1}^{\infty}k(x_{2k}y_{2k-1}-x_{2k-1}y_{2k}),$$

则 φ 是 U 上的一个双线性泛函，并且 $\varphi(\{x_n\},\{x_n\})=0$．但此时不能推出 φ 为连续的．事实上，只要证明不存在常数 M，使对一切 $\{x_n\},\{y_n\}\in U$，有

$$|\varphi(\{x_n\},\{y_n\})|\leqslant M\|\{x_n\}\|\|\{y_n\}\| \tag{1}$$

即可．为此取

$$x_n=\begin{cases}0, & n\leqslant 2(N-1)\text{ 或 } n>2N,\\ 1, & n=2N\text{ 或 } n=2N-1,\end{cases}$$

$$y_n=\begin{cases}-1, & n=2N,\\ x_n, & n\neq 2N,\end{cases}$$

此时 $\varphi(\{x_n\},\{y_n\})=2N$，而 $\|\{x_n\}\|=\|\{y_n\}\|=\sqrt{2}$，可见不存在适合不等式(1)的常数 M.

24. 存在某个 Hilbert 空间上的有界线性算子 P，适合 $\|Px\|^2=$

$\langle Px, x\rangle$，但P不是射影算子.

可以证明，若P是复Hilbert空间H上的有界线性算子，则P成为射影算子的充要条件是对任何$x\in H$，都有$\|Px\|^2=\langle Px, x\rangle$(参看[18]). 对于实Hilbert空间，这一命题并不成立. 例如，设$H=\mathbf{R}^2$，并令

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

则P不是自伴算子，因而它不是射影算子. 另一方面，任取$x=(x_1, x_2)\in H$，则

$$Px=\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right),$$

$$\|Px\|^2=\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2},$$

$$\langle Px, x\rangle=\left(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right)x_1-\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)x_2$$

$$=\frac{(x_1^2-x_2^2)}{2},$$

故$\|Px\|^2=\langle Px, x\rangle$.

注 Singh[292]于1961年构造了一个Hilbert空间H及H上的射影算子P_1, P_2，使$\|P_1-P_2\|=1$，而P_1-P_2不是射影算子.

25. 存在Hilbert空间H，使H上的每个测度μ，都有$\mu(B)=+\infty$，其中B为H中的任一非空球.

无穷维Hilbert空间是有限维欧氏空间最成功的推广. 除它们的代数和拓扑结构外，有限维欧氏空间还具有测度，自然企图把它也推广到无穷维Hilbert空间. 这里所指的测度，是指定义在开集生成的σ代数$\mathscr{R}$上的可列可加的集函数μ，适合 (i) 对每一

$A\in\mathscr{R}$，有 $0\leqslant\mu(A)\leqslant+\infty$；(ii) 平移不变性，即对每一 $x\in H$，有 $\mu(x+A)=\mu(A)$；(iii)非空开集的测度>0. 然而，这一愿望是不能实现的，因为对每个无穷维 Hilbert 空间 H 上的每一测度而言，H 中的任一非空球的测度都是无穷大. 事实上，由于测度具有平移不变性，故不失一般性，可仅考虑以 0 为球心 r 为半径的球 B. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 H 中的一个就范直交的无限集，考虑球心在 $\frac{r\varphi_n}{2}$ 具有半径 $\frac{r}{4}$ 的球 B_n，即 $B_n=\left\{x:\left\|x-\frac{r\varphi_n}{2}\right\|<\frac{r}{4}\right\}$. 若 $x\in B_n$，则

$$\|x\|\leqslant\left\|x-\frac{r\varphi_n}{2}\right\|+\left\|\frac{r\varphi_n}{2}\right\|<r.$$

因此 $B_n\subset B$，从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\subset B$. 若 $x\in B_n$ 而 $y\in B_m$，则

$$\left\|\frac{r\varphi_n}{2}-\frac{r\varphi_m}{2}\right\|\leqslant\left\|\frac{r\varphi_n}{2}-x\right\|+\|x-y\|+\left\|y-\frac{r\varphi_m}{2}\right\|.$$

由此可见，当 $m\neq n$ 时，$\|x-y\|\geqslant\frac{\sqrt{2}\,r}{2}-\frac{r}{4}-\frac{r}{4}>0$，故此时 $B_n\cap B_m=\varnothing$. 据平移不变性，$\mu(B_n)=\mu(B_m)>0$，而 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\subset B$，故 $\mu(B)=+\infty$.

注 由上可得下述具有原则性的断言：设 H 是无穷维可分 Hilbert 空间，$(H,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间，$\mathscr{R}$ 代表由 H 的开集生成的 σ 代数，$\mu\neq0$，且 $\mu(B(0,1))<+\infty$，则 μ 不是平移不变的，即不是对每个可测集 A 和 $a\in H$，有 $a+A$ 可测且 $\mu(a+A)=\mu(A)$.

26. $L^2[0,1]$ 上的一个有界积分算子 $Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$，使 $\|K(t,s)\|_{L^2}=+\infty$.

在$[0,1]\times[0,1]$上定义核$K(t,s)$如下：

$$K(t,s)=\begin{cases}2, & 0\leqslant t,\ s<\dfrac{1}{2},\\ 2^2, & \dfrac{1}{2}\leqslant t,\ s<\dfrac{3}{4},\\ & \cdots,\\ 2^n, & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqslant t,\ s<1-\dfrac{1}{2^n},\\ & \cdots,\\ 0, & [0,1]\times[0,1]\text{中的其它点},\end{cases}$$

然后在$L^2[0,1]$上定义线性积分算子

$$y(t)=Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

这里的积分是(L)积分．此时

$$\|K(t,s)\|_{L^2}=\left(\int_0^1\int_0^1|K(t,s)|^2dsdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{\Delta_n\times\Delta_n}|K(t,s)|^2dsdt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=+\infty,$$

这里，$\Delta_n=\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}},1-\dfrac{1}{2^n}\right]$．此外，对$t\in\Delta_n$，我们有

$$|y(t)|^2=\left|\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right|^2=\left|\int_{\Delta_n}K(t,s)x(s)ds\right|^2$$

$$\leqslant\int_{\Delta_n}K^2(t,s)ds\int_{\Delta_n}|x(s)|^2ds$$

$$=2^n\int_{\Delta_n}|x(s)|^2ds.$$

因此，$\displaystyle\int_0^1|y(t)|^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}|y(t)|^2dt$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}|x(s)|^2ds\int_{\Delta_n}2^n dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}|x(s)|^2ds=\int_0^1|x(s)|^2ds.$$

故$\|y\|=\|Tx\|\leqslant\|x\|$，可见$T$有界.

注 Carexob于1963年构造了一个由$L^p[0,1]$到$L^p[0,1]$的紧积分算子

$$Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

使得核$K(t,s)$是正的，且对任何r，$K(t,s)$均非r次幂(L)可积.

27. 空间$L^2[0,1]$中的非积分型的有界线性算子.

空间$L^2[0,1]$中的有界线性算子并非都是积分型的．例如，$L^2[0,1]$中的恒等算子I就不是积分型的．事实上，如果I是由某个核$K(s,t)$产生的积分型线性算子，则对于$L^2[0,1]$中的任意x，y，将有

$$\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(t)\overline{y(s)}dtds=\langle Ix,y\rangle$$

$$=\langle x,y\rangle.$$

我们特别地选取x,y为两个任意的不相交区间的特征函数，此时$\langle x,y\rangle=0$，而上式左端是$K(s,t)$在s,t平面内的一个这样的矩形上的积分，该矩形的边平行于坐标轴而且不与直线$t=s$相交．因此，$K(s,t)$在每一个这样的矩形上的积分等于0，从而几乎处处有$K(s,t)=0$，而这是不可能的，故I不是积分型算子.

28. 存在某个Hilbert空间H上的射影算子列$\{P_n\}$，使$\{P_n\}$强收敛于P，且$\dim P_n(H)<+\infty$，$\dim P(H)=+\infty$.

设H是Hilbert空间l^2，H_n是由元素$x=\{\xi_n\}$的全体所组成的H的子空间，其中当$j>n$时，$\xi_j=0$．设P_n是由H到H_n上的射影算子，则

$$\dim P_n(H)=\dim H_n=n.$$

令P是H到H上的恒等算子，则对每一$x=\{\xi_n\}\in H$，有

$$\|P_n x - P x\| = \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故$\{P_n\}$强收敛于P，且$\dim P(H) = \dim H = +\infty$.

29. 存在某个无穷维Hilbert空间中的稠定算子T，使T^*的定义域是子空间$\{0\}$.

下面的例子是由Berberian[38] 作出的：我们用N代表正整数的全体.对每一$k \in N$，设$\{n_{kl}\}_{l=1}^{\infty}$是这样的正整数列，使当$j \neq k$时，

$$\{n_{kl}: l \in N\} \cap \{n_{jl}: l \in N\} = \varnothing,$$

$$\bigcup_{k \in N} \{n_{kl}: l \in N\} = N.$$

这种数列的构造留给读者.

设$H = l^2$，令$e_k = (0, \cdots, 0, \underset{k\text{位}}{1}, 0, \cdots)$，$e_{n_{kl}} = (0, \cdots, 0, \underset{n_{kl}\text{位}}{1}, 0, \cdots)$，并令

$$T e_{n_{kl}} = e_k \quad (l = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots),$$

然后把T的定义域线性地扩张到$\{e_{n_{kl}}\}$的有限线性组合所成的集上，则$D(T)$在H中稠密，即T是稠定算子.

兹证$D(T^*) = \{0\}$. 为此任取$y = (y_1, y_2, \cdots) \in D(T^*)$，则对任一$x \in D(T)$，有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle,$$

特别有$\langle e_{n_{kl}}, T^* y\rangle = \langle T e_{n_{kl}}, y\rangle = \langle e_k, y\rangle$. 据Bessel不等式.

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\langle e_{n_{kl}}, T^* y\rangle|^2 \leqslant \|T^* y\|^2,$$

从而由等式$(T^* y)(e_{n_{kl}}) = y(e_k) = y_k$得到

$$0 = \lim_{l \to \infty} (T^* y)(e_{n_{kl}}) = y_k \quad (k \geqslant 1),$$

因此$y = 0$.

30. 存在某个Hilbert空间上的有界线性算子列，其范数关于强拓

扑不连续.

容易证明，有界线性算子列其范数关于算子的一致拓扑是连续的. 详言之，设算子列$\{T_n\}$按算子的一致拓扑收敛于T，即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n\|=\|T\|.$$

然而算子范数关于算子强拓扑未必连续. 详言之，设Hilbert空间H上的算子列$\{T_n\}$强收敛于T，即对每一$x\in H$，都有

$$\lim_{n\to\infty}T_nx=Tx,$$

则不必有$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=\|T\|$. 例如，设$\{M_n\}$是Hilbert空间$H$中的渐缩的非空子空间列，其交集为$\{0\}$. 又设$P_n$是$H$在子空间$M_n$上的射影算子，则对每一$x\in H$，有$P_nx=x_n\in M_n$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|P_nx\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0,$$

所以射影算子列$\{P_n\}$强收敛于零算子.

另一方面，由于$\|P_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$，因而$\{\|P_n\|\}$并不收敛于0，即$\{P_n\}$的范数关于算子强拓扑并不连续.

注 由于算子列的强收敛蕴涵弱收敛，故上述反例也说明了Hilbert空间上的算子列，其范数关于算子弱拓扑也不必是连续的.

31. 存在某个Hilbert空间上的有界线性算子列，其共轭算子列关于强拓扑不连续.

容易证明，共轭算子列关于算子的一致拓扑是连续的. 详言之，若算子列$\{T_n\}$按算子一致拓扑收敛于T，则$\{T_n^*\}$必定按算子一致拓扑收敛于T^*，其实，这可由等式

$$\|T_n^*-T^*\|=\|T_n-T\|$$

立即得到. 也容易证明，共轭算子列关于弱拓扑是连续的. 详言之，设$\{T_n\}$是Hilbert空间H上的有界线性算子列，如果$\{T_n\}$弱收敛于T，即对任意$x,y\in H$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_nx,y\rangle=\langle Tx,y\rangle,$$

那么$\{T_n^*\}$必定弱收敛于T^*，即对任意$x,y\in H$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n^* x, y\rangle=\langle T^* x, y\rangle.$$

其实，这可由等式

$$\begin{aligned}|\langle T_n^* x, y\rangle-\langle T^* x, y\rangle| &= |\langle x, T_n y\rangle-\langle x, T y\rangle| \\ &= |\langle T_n y, x\rangle-\langle T y, x\rangle|\end{aligned}$$

直接得到。然而共轭算子列关于强拓扑不必连续，即当$\{T_n\}$强收敛于T时，$\{T_n^*\}$不必强收敛于T^*。例如，设$H=l^2$，U是H上的右移算子，令$T_k=(U^*)^k$，$k=1,2,\cdots$。兹证$\{T_k\}$强收敛于零算子。为此，任取$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in H$，则

$$Ux=(0,x_0,x_1,x_2,\cdots),$$

于是由$\langle Ux, y\rangle=\langle x, U^* y\rangle$得到$U^*x=(x_1,x_2,\cdots)$。因此

$$\|T_k x\|^2=\|(x_k,x_{k+1},\cdots)\|^2=\sum_{n=k}^{\infty}|x_n|^2\to 0\,(k\to\infty),$$

即$\{T_k\}$强收敛于0。

兹取$x\in H$，$x\neq 0$，可证$\{T_k^* x\}$不收敛。为此只要证明$\{T_k^* x\}$不是Cauchy列即可。事实上，

$$\begin{aligned}\|(T_{m+n}^*-T_n^*)x\|^2 &= \|U^{m+n}x-U^n x\|^2=\|U^m x-x\|^2 \\ &= \|U^m x\|^2-2\mathrm{Re}\langle U^m x, x\rangle+\|x\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2-\mathrm{Re}\langle x,(U^*)^m x\rangle).\end{aligned}$$

由于$\|(U^*)^m x\|=\|(x_m,x_{m+1},\cdots)\|=\left(\sum_{n=m}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(m\to\infty)$，

可见

$$\|T_{m+n}^* x-T_n^* x\|\to\sqrt{2}\,\|x\|\quad(m\to\infty),$$

因此$\{T_n^* x\}$不收敛。

32. 存在两个有界线性算子，其乘积关于强拓扑不连续。

两个有界线性算子的乘积关于算子一致拓扑是连续的，这可由不等式

$$\begin{aligned}\|AB-A_0B_0\| &\leqslant \|AB-AB_0\|+\|AB_0-A_0B_0\|\\ &\leqslant \|A\|\|B-B_0\|+\|A-A_0\|\|B_0\|\\ &\leqslant (\|A-A_0\|+\|A_0\|)\|B-B_0\|\\ &\quad +\|A-A_0\|\|B_0\|\end{aligned}$$

直接得到．然而，两个有界线性算子的乘积关于强拓扑不必连续．我们先证明下面的

引理 设H是一个无穷维的Hilbert空间，令

$$M=\{A: A\in L(H)\text{且}A^2=0\},$$

则M在$L(H)$中是强稠密的．

证 设$A_0\in L(H)$，任取A_0的基本强邻域

$$\begin{aligned}&V(A_0,\varepsilon; x_1,\cdots,x_k)\\ &=\{A:\|A_0x_i-Ax_i\|<\varepsilon, i=1,2,\cdots,k\},\end{aligned}$$

不失一般性，可设$x_1,\cdots,x_k$是线性无关的，甚至可设它们就范直交，否则就代以H中这样的有限线性无关组（就范直交组），使得它们的张与$x_1,\cdots,x_k$的张相同，且同时把ε减小到必要的程度．对每一$i(1\leqslant i\leqslant k)$，取$y_i\in H$，使

$$\|A_0x_i-y_i\|<\varepsilon,$$

且$y_1,\cdots,y_k$的张与$x_1,\cdots,x_k$的张只有唯一的公共元素0．由于H是无穷维Hilbert空间，因而这是能行的．设A是H上的一个有界线性算子，满足条件：$Ax_i=y_i, Ay_i=0(i=1,2,\cdots,k)$，且$Az=0$当$z\perp x_i, z\perp y_i(i=1,2,\cdots,k)$时．显然，$A^2=0$且$A\in V(A_0,\varepsilon; x_1,\cdots,x_k)$．即$A_0$的任一基本强邻域都含有$M$的点，故$M$在$L(H)$中是强稠密的．引理证毕．

假如对于每个$A\in L(H)$，A^2关于强拓扑都是连续的，则M将是强闭的，于是，$M=L(H)$，这是荒谬的．因此，存在$A\in L(H)$，使A^2关于强拓扑不连续，这蕴涵了存在$A,B\in L(H)$，使AB关于强拓扑不连续．

33．存在两个有界线性算子，其乘积关于弱拓扑不连续．

设H是无穷维Hilbert空间，令

$$M=\{A:A\in L(H)\text{且}A^2=0\}.$$

由于强拓扑强于弱拓扑，故由例32的引理可知，M在$L(H)$中是弱稠密的．假如对于任意$A\in L(H)$，A^2关于弱拓扑都是连续的，则M将是弱闭的，从而$M=L(H)$，这是不可能的．因此存在$A\in L(H)$，使A^2关于弱拓扑不连续，这蕴涵了算子乘法不是一并地弱连续的．

34．存在某个Hilbert空间上的双射算子T, T_n，使$\{T_n\}$强收敛于T，而$\{T_n^{-1}\}$不强收敛于T^{-1}．

可以证明，若T_n, T都是Hilbert空间上双射的有界线性算子，且$\{T_n\}$一致收敛于T，则$\{T_n^{-1}\}$必定一致收敛于T^{-1}．其实，此时$\{\|T_n^{-1}\|\}$必定有界，于是由不等式

$$\begin{aligned}\|T_n^{-1}-T^{-1}\|&=\|T_n^{-1}(T-T_n)T^{-1}\|\\&\leqslant\|T_n^{-1}\|\|T-T_n\|\|T^{-1}\|\end{aligned}$$

直接得到$\{T_n^{-1}\}$一致收敛于T^{-1}．但$\{T_n\}$强收敛于T并不蕴涵$\{T_n^{-1}\}$强收敛于T^{-1}．例如，对$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2$，令$T=I$（恒等算子），$T_nx=\left(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\dfrac{\xi_n}{n},\xi_{n+1},\cdots\right)$，则$T, T_n$均是一对一的满射，即$T, T_n$都是双射，且

$$\|T_nx-Tx\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)|\xi_n|\to 0\quad(n\to\infty),$$

即$\{T_n\}$强收敛于T．然而由于$\{\|T_n^{-1}\|\}$无界，故$\{T_n^{-1}\}$不可能强收敛于T^{-1}．

35．存在某个Hilbert空间上的有界线性算子列$\{T_n\}$，它强收敛于双射算子T，而T_n均非双射算子．

对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令$T_nx=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)$，$T=I$，则$T$是双射算子，$\{T_n\}$强收敛于$T$，但$T_n(n=1,2,\cdots)$均非双射．

36．存在某个Hilbert空间上的有界线性算子列$\{S_n\}$，$\{T_n\}$，使

$\{S_n\}$与$\{T_n\}$均弱收敛，而$\{S_nT_n\}$并不弱收敛.

容易证明，如果H为 Hilbert 空间，$\{S_n\}$与$\{T_n\}$都是定义在H上而值域含于H中的有界线性算子列，又$\{S_n\}$与$\{T_n\}$分别一致(或强)收敛于有界线性算子S与T，那么$\{S_nT_n\}$必定一致(或强)收敛于ST. 但是，当一致(或强)收敛代以弱收敛时，相应的命题并不成立. 例如，设U是l^2到l^2内的右移算子，即对$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，令

$$U(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(0,x_0,x_1,x_2,\cdots).$$

令$S_n=(U^*)^n$，$T_n=U^n$，$n=1,2,\cdots$，则对任一$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，都有

$$\|S_nx\|^2=\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^2\to 0\quad(n\to\infty).$$

也就是说，$\{S_n\}$强收敛于 0，从而它也弱收敛于 0. 因为

$$|\langle S^*_nx,y\rangle|=|\langle x,S_ny\rangle|=|\langle S_ny,x\rangle|,$$

故由$\{S_n\}$弱收敛于 0 推知$\{S_n^*\}$也弱收敛于 0. 我们注意，对于有界线性算子A而言，有$A^{**}=A$，$(A^n)^*=(A^*)^n$(参看[14]，p.185). 因而$T_n=S_n^*$，可见$\{T_n\}$也弱收敛于 0. 然而$S_nT_n=I(n=1,2,\cdots)$，故$\{S_nT_n\}$并不弱收敛.

注 设H_1，H_2，H_3均为Hilbert空间，$S_n,S\in L(H_2,H_3)$，T_n，$T\in L(H_1,H_2)$，若$\{S_n\}$弱收敛于S，$\{T_n\}$强收敛于T，则$\{S_nT_n\}$弱收敛于ST(参看[318]，p.80). 上述反例说明了$\{S_n\}$强收敛于S，$\{T_n\}$弱收敛于T不蕴涵$\{S_nT_n\}$弱收敛于ST.

37. 存在某个Hilbert空间上的有界线性算子列$\{T_n\}$，使$\{T_n\}$与$\{T^*_n\}$均弱收敛，$\{T^*_nT_n\}$强收敛，而$\{T_nT_n^*\}$并不弱收敛.

对$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2$，令

$$T_nx=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots),$$

则T_n是l^2到l^2内的有界线性算子，其共轭算子为$T_n^*x=(0,\cdots,$

$0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$，因此

$$T_n^* T_n x = (0, \cdots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$

由此得到 $\|T_n^* T_n x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ (n \to \infty)$，即$\{T_n^* T_n\}$强收敛于 0．又对任一$f = (c_1, \cdots, c_n, \cdots) \in l^2$，有

$$|f(T_n x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k c_k\right| \to 0 \ (n \to \infty).$$

因此，$\{T_n\}$弱收敛于 0．而

$$|f(T_n^* x)| = |\xi_1 c_{n+1} + \xi_2 c_{n+2} + \cdots|$$
$$\leqslant \|x\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ (n \to \infty)$$

所以$\{T_n^*\}$也弱收敛于 0．但是，由于

$$T_n T_n^* x = (\xi_1, \xi_2, \cdots),$$

可见$\{T_n T_n^*\}$并不弱收敛．

38．存在某个有界线性算子 T，适合$\|Tx\| + \|T^* x\| \geqslant \|x\|$，而 T 不是一对一的，其值域既不稠密也不闭．

可以证明，若T是 Hilbert 空间H到其自身的有界线性算子，则T为满射的充要条件是T^*下有界：

$$\|T^* x\| \geqslant C\|x\| \quad (x \in H), \tag{1}$$

其中C为某个与x无关的常数（参看[91]，p.488）．Williams 和 Crimmins[329]提出下述问题：若把条件(1)改弱为

$$\|Tx\| + \|T^* x\| \geqslant C\|x\| \quad (x \in H), \tag{2}$$

则能否推出T是闭的？

Chernoff 和 Waterhouse[67]指出，这个问题的答案是否定的．他们的例子如下：

对 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \cdots) \in l^2$，令

$$Tx = \left(0, x_0, 0, x_2, \frac{x_3}{2}, x_4, \frac{x_5}{3}, x_6, \frac{x_7}{4}, \cdots\right),$$

则

$$T^*x=(x_1,0,x_3,\ \frac{x_4}{2},x_5,\frac{x_6}{3},\cdots).$$

因此条件(2)成立(取$C=1$). 但T不是一对一的，T 的值域既不闭，也不稠密.

39. 存在两个带有权$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$的加权移位算子 A 和 B，它们酉等价，但并不对所有的 n 都有$|\alpha_n|=|\beta_n|$.

设$\{\varphi_n\}$是可分序列 Hilbert 空间H的完全的就范直交系，H上的算子P称为对角算子，是指存在实(或复)数 α_n 使

$$P\varphi_n=\alpha_n\varphi_n,n=1,2,\cdots,$$

$\{\alpha_n\}$称为算子P的对角线.

加权移位算子是右移算子 $S(S\varphi_n=\varphi_{n+1})$与对角算子$P$(具有对角线$\{\alpha_n\}$)的乘积 SP，即若令 $A=SP$，则 $A\varphi_n=\alpha_{n+1}\varphi_{n+1}$.

可以证明，假如P与Q分别是具有对角线$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$的对角算子，且对一切n都有$|\alpha_n|=|\beta_n|$，那么加权移位算子 $A=SP$ 与 $B=SQ$ 必定是酉等价的，其中S是右移算子(参看[126]，p.36). 然而分别带有权$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$的加权移位算子A与B，由它们的酉等价性不能推出对一切n都有$|\alpha_n|=|\beta_n|$. 也就是说，上述命题之逆并不成立. 例如，设H是元素 $(\cdots,x_{-2},x_{-1},(x_0),x_1,x_2,\cdots)$ 的全体，使 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|x_k|^2<+\infty$. 定义通常的线性运算及内积，则$H$为 Hilbert 空间. 令

$$W(\cdots,x_{-2},x_{-1},(x_0),x_1,x_2,\cdots)$$
$$=(\cdots,x_{-3},x_{-2},(x_{-1}),x_0,x_1,\cdots).$$

设$\{\varphi_n\}$是H的完全的就范直交系，而令$A\varphi_n=\alpha_n\varphi_{n+1}$，$B\varphi_n=\alpha_{n+1}\varphi_{n+1}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则$A$与$B$都是加权移位算子，而且它们是酉等价的，这是因为 $W\varphi_n=\varphi_{n+1}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，故$W^*AW=B$. 但是，如果$\{|\alpha_n|\}$不是常数列，那么至少存在某个$n$，

使$|\alpha_n| \neq |\alpha_{n+1}|$.

40. 存在某个无穷矩阵，其每一行和每一列都是平方可和的，但却没有一个 Hilbert 空间上的有界线性算子与之对应.

设$\{\varphi_n\}$是可分 Hilbert 空间H的一个完全的就范直交系. 如果A是H上的有界线性算子，则对每一j，有

$$A\varphi_j = \sum_i a_{ij}\varphi_i,$$

故A对应一个矩阵，其元素为$a_{ij} = \langle A\varphi_j, \varphi_i\rangle$. 可以证明，$A$对应的矩阵对每一行和每一列都是平方可和的. 这是矩阵由算子产生的必要条件. 但不是充分条件. 例如，对于第n对角项是n的对角矩阵，就没有一个 Hilbert 空间上的有界线性算子与之对应.

注 可以证明，如果把对每一行和每一列都是平方可和的加强为$\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 < +\infty$，那么必定存在一个有界线性算子$A$，使$a_{ij} = \langle A\varphi_j, \varphi_i\rangle$. 应当注意，这个条件不是必要的，例如，单位矩阵就不满足这个条件. 至今还没有漂亮而适用的充要条件.

41. Hilbert 矩阵.

我们先证明下面的

Schur 定则 给定$a_{ij} \geqslant 0$ $(i, j = 0, 1, 2, \cdots)$，$p_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，β, γ为正数，适合$\sum_i a_{ij} p_i \leqslant \beta p_j$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$，$\sum_j a_{ij} p_j \leqslant \gamma p_i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，则可构造一个定义在l^2上的有界线性算子T，它以(a_{ij})为矩阵且$\|T\| \leqslant \sqrt{\beta\gamma}$.

证 设$(x_0, x_1, x_2, \cdots)$是只有有限多个非零坐标的复数列，则

$$\sum_i \left|\sum_j a_{ij} x_j\right|^2 = \sum_i \left|\sum_j \left(\sqrt{a_{ij}}\ \sqrt{p_j}\right)\left(\frac{\sqrt{a_{ij}}\,x_j}{\sqrt{p_j}}\right)\right|^2$$

$$\leqslant \sum_i\left(\sum_j a_{ij}p_j\right)\left(\sum_j \frac{a_{ij}|x_j|^2}{p_j}\right)\leqslant \sum_i \gamma p_i \sum_j \frac{a_{ij}|x_j|^2}{p_j}$$

$$=\gamma \sum_j \frac{|x_j|^2}{p_j} \sum_i a_{ij} \ p_i \leqslant \gamma \sum_j \frac{|x_j|^2}{p_j}\beta p_j$$

$$=\beta \ \gamma \sum_j |x_j|^2.$$

这些不等式蕴涵：l^2上的由下式

$$Tx=\left(\sum_j a_{0j}x_j, \sum_j a_{1j}x_j, \sum_j a_{2j}x_j, \cdots\right)$$

定义的算子T适合要求的条件.

上面的构造法属于Schur[278].

矩阵$\dfrac{1}{(i+j+1)}(i,j=0,1,2,\cdots)$称为Hilbert矩阵. 对于Hilbert矩阵，可构造一个定义在l^2上的有界线性算子T，适合$\|T\|\leqslant\pi$. 事实上，令$p_i=\dfrac{1}{\sqrt{i+\dfrac{1}{2}}}$，$a_{ij}=\dfrac{1}{(i+j+1)}$，

则

$$\sum_i a_{ij}p_i=\sum_i \frac{1}{\left(i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{i+\frac{1}{2}}}$$

$$<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+j+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.$$

同理，

$$\sum_i a_{ij}\ p_j < \frac{\pi}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}.$$

于是由Schur定则可知，可构造一个定义在l^2上的有界线性算子T，适合$\|T\|\leqslant\pi$.

42．存在算子S,T，使ST不相似于TS.

容易证明，若算子S，T中至少有一个存在逆算子，则ST相似于TS（参看[126]，p.39）．若S,T均不存在逆算子，则ST不必相似于TS．例如，设

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$ST=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ TS=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

易见，不存在算子A，使A^{-1}存在且$ST=A^{-1}(TS)A$，即ST不相似于TS.

43．存在某个有界线性算子T具有$\|T^n\|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，使$T$不相似于任何具有$\|P\|\leqslant1$的算子$P$.

Nagy[226]提出下述问题：设T是Hilbert空间上的有界线性算子，适合条件$\|T^n\|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，其中$M$是常数，那么是否存在$H$上的有界线性算子$P$，$\|P\|\leqslant1$，使$T$相似于$P$？

Foguel[105]和Halmos[125]分别指出，Nagy问题的答案是否定的．读者如有兴趣，可参看他们的原文.

44．存在有界线性算子T，使T有循环向量而T^*没有循环向量.

赋范线性空间X到X的有界线性算子T称为有循环向量x，是指$x,Tx,T^2x,\cdots$张成的闭线性子空间就是X.

对 $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l$，令

$$Tx=(0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则 $e_n=T^n e_0$，其中 $e_n=\{\xi_i\}$，当 $i=n$ 时 $\xi_i=1$，而当 $i\neq n$ 时 $\xi_i=0$。由于 $e_0,e_1,e_2,\cdots$ 张成的子空间在 l 中稠密，故 e_0 是 T 的循环向量。

另一方面，T^* 是 l^∞ 到 l^∞ 内的有界线性算子，由于空间 l^∞ 不可分，故 T^* 没有循环向量。

注 Rolewicz[267]指出：若 H 是可分的 Hilbert 空间，则必定存在由 H 到 H 的有界线性算子 T，使对某个 $x\in H$，集 $\{T^n x:n=0,1,2,\cdots\}$ 在 H 中稠密。Rolewicz 提出下述问题：是否每个可分无穷维 Banach 空间 X，都存在 $T\in L(X)$，使对某个 $x\in X$，$\{T^n x:n=0,1,2,\cdots\}$ 在 X 中稠密？

第十三章　线性算子的谱

引言

设 X 为复 Banach 空间，$T\in L(X)$，λ 为一复数.

(i) 如果 $\lambda I-T$ 有有界的逆算子，则称 λ 为 T 的正则值，正则值的全体称为 T 的正则集，以 $\rho(T)$ 表示. 当 $\lambda\in\rho(T)$ 时，用 R_λ 表示 $\lambda I-T$ 的有界逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$，并称 R_λ 为 T 的豫解式.

(ii) 如果 λ 不是 T 的正则值，即 $\lambda I-T$ 没有有界的逆算子，则称 λ 为 T 的谱点，谱点的全体称为 T 的谱，以 $\sigma(T)$ 表示. $\sigma(T)$ 中的点还可以分成以下几种类型：

(a) 对 $\lambda\in\sigma(T)$，方程 $(\lambda I-T)x=0$ 有非零解，则称 λ 为 T 的特征值，而称对应的非零解为 T 的特征元或特征向量.

(b) 对 $\lambda\in\sigma(T)$，$(\lambda I-T)x=0$ 只有零解，$\lambda I-T$ 的值域在 X 中稠密，则称 λ 属于 T 的连续谱.

(c) 设 $\lambda\in\sigma(T)$，$(\lambda I-T)x=0$ 只有零解，$\lambda I-T$ 的值域在 X 中不稠密，则称 λ 属于 T 的剩余谱.

(d) 设 $\lambda\in\sigma(T)$，且存在单位元素列 $\{x_n\}$，使 $\|(\lambda I-T)x_n\|\to 0(n\to\infty)$，则称 λ 属于 T 的近似点谱，T 的近似点谱的全体记作 $\sigma_a(T)$.

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，T 称为相对可逆的，是指存在 $S\in L(H)$，使得 $TST=T$.

显然，若 T 有逆算子，则 T 必定相对可逆. 又，每个有限维 Hilbert 空间上的线性算子是相对可逆的.

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子. 复数集 $\{\lambda: T-\lambda I$ 不是相对可逆的$\}$ 称为算子 T 的相对谱.

设 X 是 Banach 空间，$T\in L(X)$，算子 T 的谱半径记作 $r(T)$，

定义为

$$r(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}.$$

可以证明，对每一算子 $T\in L(X)$，恒有

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

$T\in L(X)$ 称为幂零算子，是指存在正整数 n，使 $T^n=0$；T 称为拟幂零算子，是指 $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\to 0(n\to\infty)$，即 T 的谱半径为 0.

每一个 Volterra 算子是拟幂零的.

设 H 是 Hilbert 空间，$T\in L(H)$. 算子 T 的数值值域记作 $W(T)$，定义为

$$W(T)=\{\langle Tx,x\rangle:\|x\|=1\}.$$

算子的数值值域是凸集；其闭包包含谱.

仿照谱半径的定义，可以定义算子 $T\in L(H)$ 的数值半径如下：

$$w(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in W(T)\}.$$

可以证明，w 是算子空间 $L(H)$ 上的范数. 换言之，$w(T)$ 满足：(i) $w(T)\geqslant 0$，$w(T)=0$ 当且仅当 $T=0$；(ii) $w(\alpha T)=|\alpha|\cdot w(T)$，$\alpha$ 为实(或复)数；(iii) $w(S+T)\leqslant w(S)+w(T)$.

还可进一步证明，这个范数与原来的范数 $\|T\|$ 是等价的. 详言之，有

$$\frac{\|T\|}{2}\leqslant w(T)\leqslant\|T\|.$$

范数 w 有其它许多令人惬意的性质. 例如，$w(T^*)=w(T)$，$w(T^*T)=\|T\|^2$，且 w 是酉不变的，其意即当 U 是酉算子时恒有 $w(U^*TU)=w(T)$.

由于 $\sigma(T)\subset\overline{W(T)}$，因而在谱半径和数值半径之间有一个浅易的不等式：$r(T)\leqslant w(T)$.

有关线性算子的谱的更多的材料以及上述陈述的证明，可参

看[126].

1. 存在某个有界线性算子 T，使 λ 是 T 的特征值而 $\overline{\lambda}$ 不是 T^* 的特征值.

设 T 是 l^2 上的左移算子：

$$T(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(x_1,x_2,\cdots),$$

则 T 是 l^2 上的有界线性算子，且 T^* 是右移算子：

$$T^*(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(0,x_0,x_1,x_2,\cdots).$$

当 $|\lambda|<1$ 时，由等式 $(\lambda I-T)x=0$ 得到 $x_1=\lambda x_0$，$x_2=\lambda^2 x_0,\cdots$，$x_n=\lambda^n x_0,\cdots$，取 $x_0\neq 0$，则 $x=(x_0,\lambda x_0,\lambda^2 x_0,\cdots)$ 是算子方程

$$(\lambda I-T)x=0$$

在 l^2 中的非零解. 故 λ 是 T 的特征值. 而由

$$(\lambda I-T^*)x=0$$

得 $x_0=x_1=\cdots=x_n=\cdots=0$，因此方程 $(\lambda I-T^*)x=0$ 只有唯一解 $x=0$，即 T^* 没有特征值.

2. 谱映射定理不成立的有界线性算子.

谱映射定理　设 X 是复 Banach 空间，$T\in L(X)$，p 是多项式. 则 $p(\sigma(T))=\sigma(p(T))$（参看[88]，p.13）.

应当注意，对于实 Banach空间，谱映射定理不成立. 例如，对 $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，令 $T(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$，则 $\sigma(T)=\varnothing$. 另一方面，令 $p(t)=t^2$，则因 T^2 有特征值 -1，故谱映射定理不成立.

3. 存在某个只有唯一的特征值 $\lambda=0$ 的有界积分算子，其核 K 具有性质 $\|K^n(s,t)\|_{L^2}=+\infty(n=1,2,\cdots)$.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数列 $\{\varphi_n(s)\}$ 如下：

$$\varphi_1(s)=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}}, & 0\leqslant s<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$\varphi_2(s)=\begin{cases}\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2, & \frac{1}{2}\leqslant s<\frac{3}{4},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(s)=\begin{cases}\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n, & \frac{(2^n-2)}{2^n}\leqslant s<\frac{(2^n-1)}{2^n},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

则$\{\varphi_n(s)\}$是$L^2[0,1]$中的一个直交系，此直交系并不完全，因为$L^2[0,1]$中的函数

$$\varphi(s)=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}}, & 0\leqslant s<\frac{1}{4},\\ -2^{\frac{1}{2}}, & \frac{1}{4}\leqslant s<\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

与所有的$\varphi_n(s)$成直交．令

$$K(s,t)=\varphi_2(s)\varphi_1(t)+\varphi_4(s)\varphi_2(t)+\varphi_6(s)\varphi_3(t)+\cdots.$$

显然，积分算子

$$Tx(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

是有界的．兹证T有唯一的特征值$\lambda=0$，且$\|K^n(s,t)\|_{L^2}=+\infty$ $(n=1,2,\cdots)$．事实上，对每一$x\in L^2[0,1]$，在范数拓扑下x可表成下述形式：

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i+h,$$

这里$\langle h,\varphi_i\rangle=0(i=1,2,\cdots)$．显然，$Tx=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_{2i}$，因此$\|Tx\|$

$\leqslant\|x\|$. 若 $Tx=\lambda x(\lambda\neq 0)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi_{2i}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda\alpha_i\varphi_i+\lambda h,$$

因而 $h=0$ 及 $\alpha_i=0(i=1,2,\cdots)$，故 $x=0$，即 $\lambda\neq 0$ 不是 T 的特征值. 若 $Tx=0\cdot x$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_{2i}=0$. 因此 $\alpha_i=0(i=1,2,\cdots)$. 由此可知，x 为对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量的充要条件是 $\langle x,\varphi_i\rangle=0(i=1,2,\cdots)$，所以 T 仅有的特征值是 $\lambda=0$.

最后，T^n 显然有核

$$\begin{aligned}K^n(s,t)=&\varphi_{2^n}(s)\varphi_1(t)+\varphi_{2\cdot 2^n}(s)\varphi_2(t)\\&+\varphi_{3\cdot 2^n}(s)\varphi_3(t)+\cdots\end{aligned}$$

因此，$\|K^n(s,t)\|_{L^2}=+\infty$.

4. **任给具有聚点 $\lambda=0$ 的复数列 $\{\lambda_n\}$，可构造 $L^2[0,+\infty)$ 上的稠定的有界积分算子 T，使 $\lambda_i(i=1,2,\cdots)$ 均为 T 的特征值，且对 $t\in[0,+\infty)$，有**

$$\int_0^{+\infty}|K(t,s)|^2ds<+\infty.$$

下面的例子是由 von. Neumann[233]作出的：因为 $\lambda=0$ 是数列 $\{\lambda_n\}$ 的聚点，故存在子列 $\{\lambda_{m_i}\}$，使 $|\lambda_{m_i}|<i^{-1}$. 剩下的子列记作 $\{\lambda_{n_k}\}$，不妨设它仍有无穷多项. 然后，我们作出一个二重标号数列如下：

$$\begin{array}{cccccc}
n_1 & m_1 & m_2 & m_4 & m_8 & \cdots\\
n_2 & m_3 & m_6 & m_{12} & m_{24} & \cdots\\
n_3 & m_5 & m_{10} & m_{20} & m_{40} & \cdots\\
 & & \cdots\cdots & & & \\
n_i & m_{2i-1} & m_{2(2i-1)} & m_{4(2i-1)} & m_{8(2i-1)} & \cdots\\
 & & \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

于是,位于$(i,1)$处的元是n_i,而当$j\geqslant 2$时,位于(i,j)处的元是$m_{2^{j-1}(2i-1)}$. 用λ_{ij}表示具有二重标号(i,j)的元λ,那么,数列$\{\lambda_n\}$中的每个λ都被表成二重标号的元λ_{ij}. 因此,当$j\geqslant 2$时,$|\lambda_{ij}|<2^{-(j-3)}$. 由此可知,对$i=1,2,\cdots$,都有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_{ij}|<+\infty.$$

设$\{\varphi_n(t)\}$是$L^2[0,1]$中一致有界的完全直交系,于是存在常数M,使对一切正整数i和$t\in[0,1]$,都有$|\varphi_i(t)|\leqslant M$. 在$[0,+\infty)$上定义函数列$\{\varphi_{ij}(t)\}(i,j=1,2,\cdots)$如下:

$$\varphi_{ij}(t)=\begin{cases}\varphi_j(t-(i-1)), & i-1\leqslant t<i,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

易见,$\{\varphi_{ij}(t)\}$是$L^2[0,+\infty)$中的完全直交系. 然后,我们在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上定义:

$$K(t,s)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_{ij}\varphi_{ij}(t)\overline{\varphi_{ij}(s)},$$

对每一$(t,s)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$,上面的二重级数绝对收敛,这是因为对$i_1-1\leqslant t<i_1$,$i_2-1\leqslant s<i_2$,当$i_1\neq i_2$时,级数的每一项均为0,而当$i_1=i_2$时,具有$i\neq i_1=i_2$的一切项均为0. 因此,这个二重级数的和是仅对标号集$\{j\}_{j=1}^{\infty}$来取的,由此可知

$$|K(t,s)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_{i_1j}|M^2.$$

于是得到

$$\int_0^{+\infty}|K|^2ds=\int_{i_1-1}^{i_1}|K|^2ds\leqslant M^4\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_{i_1j}|^2<+\infty.$$

因此,对每一$x\in L^2[0,+\infty)$及$t\in[0,+\infty)$,积分

$$y(t)=Tx(t)=\int_0^{+\infty}K(t,s)x(s)ds$$

存在. 显然，$T\varphi_{ij}=\lambda_{ij}\varphi_{ij}$. 因此，若令 D 是一切有限线性组合 $\sum\alpha_{ij}\varphi_{ij}$ 所成之集，则 T 是定义在 D 上(D 在 $L^2[0,1]$中稠密)而值域含于 $L^2[0,1]$中的有界线性算子. 显然，$\lambda_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$ 就是原来的数列$\{\lambda_n\}$，它们都是 T 的特征值.

5. 任给复平面上的紧集 C，可构造算子 T，使 T 的全体特征值就是 C.

我们首先指出，若 T 是具有对角线$\{\alpha_n\}$的对角算子，则 T 具有逆算子的充要条件是存在有界数列$\{\beta_n\}$，使 $\alpha_n\beta_n=1(n=1,2,\cdots)$. 即 T 具有逆算子的充要条件是存在正数 δ，使对任何正整数 n 都有$|\alpha_n|\geqslant\delta$. 由此推知，$T-\lambda I$ 具有逆算子的充要条件是存在正数 η，使对任何正整数 n，都有$|\alpha_n-\lambda|\geqslant\eta$，即 $\lambda\notin\overline{\{\alpha_n\}}$.

事实上，若$\{\beta_n\}$是有界数列，使 $\alpha_n\beta_n=1$，$n=1,2,\cdots$，则具有对角线$\{\beta_n\}$的对角算子 S 是 T 的逆算子. 反之，若 T 具有逆算子 T^{-1}，则 $T^{-1}(\alpha_n\varphi_n)=\varphi_n$，其中$\{\varphi_n\}$是可分 Hilbert 空间的完全的规范直交系. 于是，$T^{-1}\varphi_n=\dfrac{\varphi_n}{\alpha_n}$. 由于$\|T^{-1}\varphi_n\|\leqslant\|T^{-1}\|$，因而若令 $\beta_n=\dfrac{1}{\alpha_n}$，则$\{\beta_n\}$是有界数列，且 $\alpha_n\beta_n=1$，$n=1,2,\cdots$. 今设 C 为复平面上的任一紧集，则 C 有界且可分，从而存在有界数列$\{\alpha_n\}$，使 $C=\overline{\{\alpha_n\}}$. 设 T 是具有对角线$\{\alpha_n\}$的对角算子，则据上面证明的结论，λ 为 T 的特征值的充要条件是 $\lambda\in C$.

6. 存在某个不可分 Banach 空间上的范数为 1 的算子 T，使 T 有不可数个模数为 1 的特征值.

设 C 为模数为 1 的全体复数，在 C 上取通常的拓扑. 令 $X=C^C$，并在 X 上取乘积拓扑. X 中的代表元素记作$\{x_\lambda\}_{\lambda\in C}$. 设 g 是 X 到自身的映射，它把第 λ 个坐标扩大 λ 倍，即 $g\{x_\lambda\}_{\lambda\in C}=\{\lambda x_\lambda\}_{\lambda\in C}$. 又设 B 为复 Banach 空间 $C(X)$，令 $Tf=f\circ g$，其中 $f\in C(X)$，则$\|T\|=1$，从而$\|T^*\|\leqslant1$. 若 f 是 $C(X)$中这样的元

素，它在点$\{x_\lambda\}_{\lambda\in C}$取值为第$\lambda$个坐标$x_\lambda$，则$f$是关于$\lambda$的特征向量．于是，$C$中每一点都是$T$的特征值．当然，Banach空间$B=C(X)$是不可分的．

注　若Banach空间B可分且$\|T^n\|\leqslant M<+\infty\ (n=1,2,\cdots)$，则$T$不可能有不可数多个模数为1的特征值(参看[148])．上述反例说明了在这个命题中可分性的条件不能去掉．

又，若Banach空间B可分且$\|T\|=1$，则T有可能存在不可数多个特征值．例如，复Banach空间l^2上的左移算子T：

$$T(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots)=(\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_{n+1},\cdots),$$

若$|\lambda|<1$，$x=(\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^n,\cdots)\in l^2$，则

$$Tx=\lambda x,$$

$\|T\|=1$，且T有所有模数小于1的全部复数作它的特征值．然而容易看出，T没有模数为1的特征值．

7．存在某个可分Banach空间上的谱半径为1的算子，它有不可数多个模数为1的特征值．

设$X=L^2[0,1]$，对$x\in X$，令

$$(Sx)(t)=e^{2\pi it}x(t),$$

$$(Tx)(t)=\int_0^t e^{2\pi is}x(s)ds.$$

对每一$\alpha\in[0,1)$，用$\chi_{[0,\alpha)}(t)$代表区间$[0,\alpha)$的特征函数．容易验证，$\chi_{[0,\alpha)}(t)$是$S-T$对应于特征值$e^{2\pi i\alpha}$的特征向量．因之，可分Banach空间X上的算子$S-T$有不可数多个特征值$e^{2\pi i\alpha}$，它们的模数均为1．

兹证算子$S-T$的谱半径为1．事实上，直接计算可得$T^2=ST-TS$．又，应用归纳法可得

$$(S-T)^n=S^n-nTS^{n-1},\ n\geqslant 1.$$

于是$\|(S-T)^n\|\leqslant 1+2\pi n$，可见$S-T$的谱半径为

$$r(S-T)=\lim_{n\to\infty}\|(S-T)^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+2\pi n)^{\frac{1}{n}}$$
$$=1.$$

例 6 与例 7 均属于 Jamisom[148].

注 若Banach空间X可分且$\|T^n\|\leqslant M<+\infty(n=1,2,\cdots)$，则$T$的模数为 1 的特征值至多有可数多个. 上述反例说明了在这个命题中不能把条件$\|T^n\|\leqslant M<+\infty$代以$r(T)=1$.

8．仅有唯一谱点——连续谱的算子.

在$L^2[0,1]$上定义积分算子

$$Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

这里

$$K(t,s)=\begin{cases}1, & t\geqslant s,\\ 0, & t<s.\end{cases}$$

因此，$Tx(t)=\int_0^t x(s)ds$，$\|K(t,s)\|_{L^2}=\frac{1}{2}$. 令

$$K_1(t,s)=K(t,s),$$
$$K_n(t,s)=\int_0^t K(t,v)K_{n-1}(v,s)dv \qquad (n=2,3,\cdots),$$

则显然有

$$T^n x(t)=\int_0^1 K_n(t,s)x(s)ds \qquad (n=1,2,\cdots),$$

$$K_n(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geqslant s,\\ 0, & t<s.\end{cases}$$

因之，$\|T^n\|\leqslant\|K_n(t,s)\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{(n-1)!}$. 可见当 $\lambda\neq0$ 时，级数 $-\lambda^{-1}I-\lambda^{-2}T-\lambda^{-3}T^2-\cdots$一致收敛到一个有界线性算子$S_\lambda$.

因为

$$(T-\lambda I)S_\lambda=S_\lambda(T-\lambda I)=I,$$

故有 $S_\lambda=R_\lambda$,即对任何 $\lambda\neq0$,λ 都属于 T 的豫解式.

其次，方程 $Tx=0$ 只有零解. 我们再考虑函数系 $\varphi_n(t)=\sin n\pi t(n=1,2,\cdots)$,易见,它在 $L^2[0,1]$中是完全的. 又因为

$$T(n\pi\cos n\pi t)=n\pi\int_0^t\cos n\pi s ds$$
$$=\sin n\pi t=\varphi_n(t),$$

所以 T 的值域在 $L^2[0,1]$中稠密. 最后，不难算出，$\|\cos n\pi t\|=2^{-\frac{1}{2}}$, $\|T(\cos n\pi t)\|=\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{n\pi}$, $n=1,2,\cdots$,所以 T^{-1} 无界,可见 $\lambda=0$ 属于 T 的连续谱.

9. 仅有唯一谱点——剩余谱的算子.

在 Banach 空间 $C[0,1]$上定义积分算子

$$y(t)=Tx(t)=\int_0^t x(s)ds.$$

令

$$K_1(t,s)=\begin{cases}1, & t\leqslant s,\\ 0, & t>s,\end{cases}$$

则

$$T^n x(t)=\int_0^1 K_n(t,s)x(s)ds,\ n=1,2,\cdots,$$

其中

$$K_n(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\leqslant s,\\ 0, & t>s.\end{cases}$$

因此,$\|T\|=1$, $\|T^n\|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}$. 可见当 $\lambda\neq0$ 时，级数 $-\lambda^{-1}I-\lambda^{-2}T-\lambda^{-3}T^2-\cdots$一致收敛,且其和显然是 R_λ,故 $\lambda\neq0$ 均属于 T 的豫解式.

其次,方程 $Tx(t)=0$ 只有零解. 由于对任何 $x\in C[0,1]$,当 t

$=0$ 时 $y(t)=Tx(t)=0$，因此，对任何 $x\in C[0,1]$，恒有 $\|x_0-Tx\|\geqslant 1$，其中 $x_0(t)\equiv 1$. 由此可知，T 的值域在 $C[0,1]$ 中不稠密，故 $\lambda=0$ 属于 T 的剩余谱.

10. 存在算子 S,T，它们均不存在逆算子，但 ST 与 TS 却有相同的谱.

设

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 S 与 T 均不存在逆算子，且

$$ST=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad TS=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 ST 与 TS 的谱均为 $\{1\}$.

11. 存在算子 S,T，使 ST 与 TS 有不同的谱.

设 $H=l^2$，对 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in H$，令

$$Sx=(0,x_0,x_1,x_2,\cdots),$$

又令 $T=S^*$，则 $Tx=(x_1,x_2,\cdots)$，故

$$(ST)x=(0,x_1,x_2,\cdots),$$

$$(TS)x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)=Ix.$$

因此，ST 的谱是 $\{0,1\}$，而 TS 的谱是 $\{1\}$.

注 若 S,T 中至少有一个存在逆算子，则 ST 与 TS 必有相同的谱(参看[126]，p.39). 例 11 说明了在这个命题中 S,T 至少有一个存在逆算子的条件不能去掉. 例 10 说明了这个命题之逆并不成立. 又，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\lambda\in\rho(ST)$ 的充要条件是 $\lambda\in\rho(TS)$，即 $\rho(ST)$ 与 $\rho(TS)$ 中的非零元素必定相同(参看[126]，p.39). 例 11 也说明了当 $\lambda=0$ 时，这个陈述并不成立.

12. 存在某个非恒等算子 T，使 T 的谱是 $\{1\}$ 且 $\|T\|=1$.

如果 T 是 Banach 空间 X 上的恒等算子，那么当 $\lambda\neq 1$ 时，$\lambda I-T$ 有有界的逆算子，而当 $\lambda=1$ 时，它没有有界的逆算子，因

而$\sigma(T)=\{1\}$，又易见$\|T\|=1$．但也确实存在非恒等算子T而有$\sigma(T)=\{1\}$，且$\|T\|=1$．例如，我们在复Banach空间$L^2[0,1]$上考虑Volterra积分算子

$$(Vx)(t)=\int_0^t x(s)ds,$$

则任何复数$\lambda\neq 0$都是V的正则值，而$\lambda=0$是V的谱点(参看例8)．因此，$\sigma(I+V)=\{1\}$，从而$I+V$是可逆的．令

$$T=(I+V)^{-1},$$

则$\sigma(T)=\{1\}$．因为$r(T)=1$，可见$\|T\|\geqslant 1$．另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\|T^{-1}x\|^2&=\|(I+V)x\|^2=\langle x+Vx,x+Vx\rangle\\&=\|x\|^2+\langle Vx,x\rangle+\langle V^*x,x\rangle+\|Vx\|^2\\&=\|x\|^2+\langle (V+V^*)x,x\rangle+\|Vx\|^2.\end{aligned}$$

易见，$\langle (V+V^*)x,x\rangle\geqslant 0$，从而$\|T^{-1}\|\geqslant 1$，$\|T\|\leqslant 1$．因此，$\|T\|=1$．

13．没有特征值的拟幂零算子．

由谱映射定理可知，若T是幂零算子，则$\sigma(T)=\{0\}$．又由谱半径的表达式$r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$可知，对于拟幂零算子$T$而言，也有$\sigma(T)=\{0\}$．又若$T$是幂零算子，则0显然是$T$的特征值．于是便产生问题：0是否必为拟幂零算子的特征值？我们将要指出，这个问题的答案是否定的．

设H是这样的数列$(\cdots,\xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)$全体，使$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty$．在$H$上定义通常的内积，则$H$为一可分的Hilbert空间．$H$上的双边移位算子$W$定义为

$$\begin{aligned}&W(\cdots,\xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)\\&=(\cdots,\xi_{-3},\xi_{-2},(\xi_{-1}),\xi_0,\xi_1,\cdots).\end{aligned}$$

易见，W是由H到$R(W)$上的等距算子．令

$$e_n=(\cdots,\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\cdots),$$

其中 $\xi_n=1$，而 $\xi_i=0(i\neq n)$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则$\{e_n\}$是H中的完全的就范直交系，且 $We_n=e_{n+1}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

设$\{\alpha_n\}$是有界复数列，带权数列$\{\alpha_n\}$的加权移位算子是移位算子$W(We_n=e_{n+1})$与具有对角线$\{\alpha_n\}$的对角算子 $P(Pe_n=\alpha_ne_n)$ 的乘积WP，即$WPe_n=\alpha_ne_{n+1}$. 令$T=WP$，则 $Te_n=\alpha_ne_{n+1}$，$T^2e_n=\alpha_n\alpha_{n+1}e_{n+2}$，$T^3e_n=\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}e_{n+3}$，$\cdots$. 显然，$\|T\|=\sup\limits_n|\alpha_n|$，

$\|T^2\|=\sup\limits_n|\alpha_n\alpha_{n+1}|$，一般，$\|T^k\|=\sup\left|\prod\limits_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right|(k=1,2,\cdots)$.

因此，

$$r(T)=\lim_{k\to\infty}\sup_n\left|\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right|^{\frac{1}{k}}.$$

现取$\alpha_n=\frac{1}{2^n}$，则

$$r(T)=\lim_{k\to\infty}\sup_n\left|\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^{n+i}}\right|^{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

令$\left(\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2^m}$，则$m=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}i=\frac{1}{2}(k-1)$，因此，$r(T)=0$，即$T$是一个拟幂零算子.

兹证T没有特征值. 事实上，设 $x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 且 $Tx=\lambda x$，则由

$$Tx=(0,\alpha_0x_0,\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots)$$

得到 $\lambda x_0=0$，$\lambda x_{n+1}=\alpha_nx_n$. 由于 $\alpha_n\neq0$，因而不论 $\lambda=0$ 或 $\lambda\neq0$，都有 $x_n=0$，即 $x=0$，故T没有特征值.

14. 没有特征值的紧算子.

如果T是定义在 Banach 空间 X 上而值域含于X中的紧线性算子，那么任何复数 $\lambda\neq0$，或者是T的正则值或者是T的特征值，二者必居其一. 换句话说，T的非零谱点都是T的特征值（参看

[14],pp.150—151). 这里,我们向读者介绍一个没有特征值的紧算子.

对 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2$,令

$$Tx=\left(0,x_1,\frac{x_2}{2},\ \frac{x_3}{3},\cdots\right).$$

易见,T 是紧线性算子. 如果 $\lambda\neq 0$, 则由等式 $Tx=\lambda x$ 得到 $0=\lambda x_1$, $\frac{x_{n-1}}{(n-1)}=\lambda x_n(n=2,3,\cdots)$,因此$x=0$,即每个复数$\lambda\neq 0$都是$T$的正则值. 如果 $\lambda=0$,则 $\eta_1=0$,其中

$$Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots),$$

因此$\overline{R(T)}\neq l^2$,故 $\lambda=0$ 属于T的剩余谱.

注 可以证明,没有特征值的紧算子必为拟幂零算子. 因此,上述例子中的算子T必是拟幂零算子. 由于幂零算子必有特征值, 所以上述例子也说明了紧算子不必是幂零算子.

15. 存在两个算子, 其和的谱半径大于它们的谱半径之和.

设

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则$r(S)=r(T)=0$,而$r(S+T)=1$,故$r(S+T)>r(S)+r(T)$.

16. 存在两个算子, 其积的谱半径大于它们的谱半径之积.

设

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则$r(S)=r(T)=0$,而$r(ST)=1$,故$r(ST)>r(S)r(T)$.

注 容易证明, 若 S,T 是可换算子, 则 $r(S+T)\leqslant r(S)+r(T)$,$r(ST)\leqslant r(S)r(T)$. 例 15 与例 16 说明了在这个命题中,$S$ 与 T 可换的条件不可去掉.

17. 存在一列算子,其中每个算子的谱都是$\{0\}$, 而其直接和的谱

半径却等于1.

容易证明，两个算子的直接和的谱等于它们的谱的并. 定义在无穷维 Hilbert 空间上的具有对角线$\{\alpha_n\}$的对角算子T可以看作它是无穷多个算子的直接和，其中每个算子都定义在一维空间上. 此时可以证明，它的谱等于它们的谱的并的闭包，即$\sigma(T)=\overline{\{\alpha_n\}}$（参看[126], p.30). 于是便产生问题：无穷多个算子的直接和的谱是否永远等于各个算子的谱的并的闭包？Halmos 指出，这个问题的答案是否定的. 考虑数列

$$(1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,\cdots), \tag{1}$$

设T是可分 Hilbert 空间H上的一个带有权数(1)的加权右移算子，数列(1)中的0保证了T是由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots,$$

所给出的诸算子的直接和，从而它是一列算子的直接和，这些算子中的每一个的谱都是$\{0\}$. 可是由于权数列有任意长度的由1组成的组段，加权右移算子的谱半径公式

$$r(T)=\lim_k \sup_n \left| \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_{n+i} \right|^{\frac{1}{k}}$$

（参看例13）蕴涵$r(T)=1$.

注　Chow[68]对Halmos的例子作了推广，他构造了一个非拟幂零算子，它是幂零算子的直接积分.

18.　存在某个有界线性算子列$\{T_k\}$，使$\|T_k-T\|\to 0(k\to\infty)$，且$T_k$的谱都是单位圆周，而$T$的谱不是单位圆周.

下面的例子属于Lumer：

设T_k为具有权数列$\left(\cdots,1,1,1,\left(\frac{1}{k}\right),1,1,1,\cdots\right)$的加权移位算子，这里$k=1,2,\cdots,\infty$，并规定$\frac{1}{\infty}=0$. 易见，$\|T_k-T_\infty\|$

$\to 0(k\to\infty)$. 由于$\frac{1}{k}\leqslant 1$, 故

$$r(T_k)=\lim_{j\to\infty}\sup_n\left|\prod_{i=0}^{j-1}\alpha_{n+i}\right|^{\frac{1}{j}}=1.$$

因此,对任何 $k(k=1,2,\cdots,\infty)$,T_k 的谱都包含于单位闭圆盘之中.

当 $k<\infty$时,T_k存在逆算子 T_k^{-1}, 且 T_k^{-1} 也是加权移位算子. 由于

$$T_k^{-1}e_n=\begin{cases}e_{n-1}, & n\neq 1,\\ ke_{n-1}, & n=1,\end{cases}$$

可见 T_k^{-1}的权数列为$(\cdots,1,1,(1),k,1,1,\cdots)$,从而

$$r(T_k^{-1})=\lim_{j\to\infty}\sup_n\left|\prod_{i=0}^{j-1}\alpha_{n+i}\right|^{\frac{1}{j}}=\lim_{j\to\infty}k^{\frac{1}{j}}=1,$$

这里 $k=1,2,\cdots$,但 $k\neq\infty$. 由此可知,当$k=1,2,\cdots,k\neq\infty$时,T_k^{-1}的谱也包含在单位闭圆盘之中. 于是,据关于求逆运算的谱映射定理,T_k(以及 T_k^{-1})的谱包含于单位圆周之中(参看[126], p.38). 由于 T_k 是加权移位算子,故若 α 是模数为1的复数,则 αT_k也是加权移位算子,且它的权数与 T_k 对应的权数具有相同的模. 由此可知,当 λ 是 T_k 的谱点时,$\alpha\lambda(|\alpha|=1)$也是 T_k的谱点. 因此,T_k的谱正好是单位圆周. 但是,T_∞的谱不是单位圆周,这是因为 $T_\infty e_0=0$,故 T_∞的谱含有原点. 其实,T_∞的谱是单位圆盘(参看[126]).

19. 存在某个有界线性算子列$\{T_k\}$,使$\|T_k-T\|\to 0(k\to\infty)$,且$T_k$ 的谱半径都是零,而 T 的谱半径却大于零.

我们有下述问题: 有界线性算子的谱半径是否一定连续? 即当$\|T_k-T\|\to 0(k\to\infty)$时,是否必有$r(T_k)\to r(T)(k\to\infty)$? Kakutani 指出,这个问题的答案是否定的. 他的例子如下:

设$\{\varepsilon_n\}$是收敛于0的正数列. 我们定义一个数列$\{\alpha_n\}$如下:

每第二个 α 等于 ε_0(即 $\alpha_0=\varepsilon_0,\alpha_2=\varepsilon_0,\alpha_4=\varepsilon_0,\cdots$)；剩下的 α 中每第二个 α 等于 ε_1（即 $\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_5=\varepsilon_1,\alpha_9=\varepsilon_1,\cdots$）；再剩下的 α 中每第二个 α 等于 ε_2；如此继续以至无穷．这些 α 的数列呈下形：

$$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\varepsilon_2,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\varepsilon_3,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\varepsilon_2,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\cdots.$$

设 T 是以这些 α 为权数的加权单侧移位算子，而对每一非负整数 k，T_k 是这样的加权移位算子，其权数就是诸 α，但其中每一 ε_k 均换成 0．例如，T_2 的权数列就是

$$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,0,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\varepsilon_3,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,0,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_0,\cdots.$$

易见，T_k 是以 2^{k+1} 为指数的幂零算子，故 T_k 的谱半径为 0，即

$$r(T_k)=\lim_{n\to\infty}\|T_k^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

又易见 T_k-T 也是加权移位算子，且 $\|T_k-T\|=\varepsilon_k$，从而 $T_k\to T$ $(k\to\infty)$．剩下的是要证明 $r(T)>0$．我们首先注意

$$\alpha_0=\varepsilon_0,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2=\varepsilon_0^2\varepsilon_1,$$

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6=\varepsilon_0^4\varepsilon_1^2\varepsilon_2,$$

一般，若 $n=2^p-2(p=1,2,3,\cdots)$，则

$$\alpha_0\cdots\alpha_n=\varepsilon_0^{2^{p-1}}\cdots\varepsilon_{p-1},$$

因此 $\ln(\alpha_0\cdots\alpha_n)=\sum\limits_{k=0}^{p-1}2^{p-1-k}\ln\varepsilon_k=2^p\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$，

即
$$\ln(\alpha_0\cdots\alpha_n)^{\frac{1}{(n+1)}}=\frac{2^p}{2^p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}.\tag{1}$$

取 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\ln\varepsilon_k}{2^{k+1}}$ 是收敛级数，从而由(1)式得到

$$\liminf_n\ \ln(\alpha_0\cdots\alpha_n)^{\frac{1}{(n+1)}}>-\infty,$$

所以 $\liminf\limits_n\left(\prod\limits_{i=0}^n\alpha_i\right)^{\frac{1}{(n+1)}}>0$．因此，$r(T)>0$．

20．数值值域不闭的有界线性算子．

在有限维 Hilbert 空间中，有界线性算子 T 的数值值域 $W(T)=\{\langle Tx,x\rangle:\|x\|=1\}$ 是一个紧集的连续象，因而它是紧的．于是便产生问题：无穷维 Hilbert 空间中的有界线性算子的数值值域是否一定是闭的？这个问题的答案是否定的，我们先证明下面的

定理 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，λ 是复数，使 $|\lambda|=\|T\|$，而且 $\lambda\in W(T)$，则 λ 必为 T 的特征值．

证 因为 $\lambda\in W(T)$，所以存在 $x\in H$，$\|x\|=1$，且 $\lambda=\langle Tx,x\rangle$．于是

$$\|T\|=|\lambda|=|\langle Tx,x\rangle|\leqslant\|Tx\|\|x\|\leqslant\|T\|.$$

因此，等号处处成立，即

$$\|T\|=|\lambda|=|\langle Tx,x\rangle|=\|Tx\|\|x\|.$$

由关于 Schwarz 不等式变成等式时的事实知对某个 λ_0，有 $Tx=\lambda_0x$．由此得到

$$\lambda_0=\lambda_0\langle x,x\rangle=\langle\lambda_0x,x\rangle=\langle Tx,x\rangle=\lambda,$$

即 λ 是 T 的特征值．

由于上面的定理，我们得到下面的断语：

若 $\lambda\in\overline{W(T)}$，使 $|\lambda|=\|T\|$ 且 λ 不是 T 的特征值(特别，若 T 没有特征值)，则 $\lambda\notin W(T)$．

现在我们着手构造一个有界线性算子 T，使 $W(T)$ 不闭．

首先注意，每个算子 T 的特征值 $\lambda\in W(T)$，这是因为若 $Tx=\lambda x$(具有 $\|x\|=1$)，则 $\langle Tx,x\rangle=\lambda$，即 $\lambda\in W(T)$．其次，设 $\{\alpha_n\}$ 是有界数列，使对每一 n，$|\alpha_n|<\alpha=\sup\limits_n|\alpha_n|$．又设 T 是具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子，则每个 α_n 均为 T 的特征值．又由 $\|T\|=\sup\limits_n|\alpha_n|=\alpha$，而 $\alpha_n\in W(T)$，故 $\alpha\in\overline{W(T)}$．由于 α 不是 T 的特征值，故 $\alpha\notin W(T)$，即 $W(T)$ 不是闭集．

21．存在某个拟幂零算子 T，使 0 不属于 T 的数值值域．

因为算子 T 的数值值域的闭包 $\overline{W(T)}$ 包含了 T 的一切谱点(参

看[126]，p.111)．所以，如果T是一个拟幂零算子，那么$0\in\overline{W(T)}$．于是便产生问题：是否必有$0\in W(T)$？我们将指出，一般说来，不必有$0\in W(T)$．

设V是$L^2[0,1]$上的 Volterra 积分算子：

$$(Vx)(t)=\int_0^t x(s)ds,$$

令 $$T=I-(I+V)^{-1}=V(I+V)^{-1}.$$

可证V是拟幂零算子，故T也是拟幂零算子．

兹证$0\notin W(T)$．为此只要证明，若x是使$\langle Tx,x\rangle=0$的向量，则$x=0$．事实上，若$\langle Tx,x\rangle=0$，则$\langle x,x\rangle=\langle (I+V)^{-1}x,x\rangle$．于是由$\|(I+V)^{-1}\|=1$(参看例12)得到

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\langle (I+V)^{-1}x,x\rangle\leqslant\|(I+V)^{-1}\|\|x\|^2\\&=\|x\|^2.\end{aligned}$$

因此，$\|x\|^2=\langle (I+V)^{-1}x,x\rangle=\|(I+V)^{-1}\|\|x\|^2$．

由此可知，x必是$(I+V)^{-1}$的特征向量．由于$\sigma((I+V)^{-1})=\{1\}$(参看例12)，可见$(I+V)^{-1}x=x$，或$x=(I+V)x$，即$Vx=0$，故$x=0$．

注 这个例子也说明了有界线性算子T的数值值域$W(T)$不必是闭的．

22．存在某个有界线性算子，它的数值值域的闭包和数值半径关于算子的强拓扑不连续．

我们有下述问题：数值半径关于它的变量是否连续？为了回答这个问题，我们引入复平面内两个紧集之间的Hausdorff距离．设M是复数集，$\varepsilon>0$，令

$$M+(\varepsilon)=\{z+\alpha:z\in M,|\alpha|<\varepsilon\}.$$

设M,N是复平面内的紧集，定义M与N之间的Hausdorff距离为

$$\rho(M,N)=\inf\{\varepsilon:\text{既有 }M\subset N+(\varepsilon),\text{ 又有 }N\subset M+(\varepsilon)\}.$$

所谓$\overline{W(T)}$关于算子一致拓扑是连续的，是指对任意$\varepsilon>0$，当$\|S-T\|<\varepsilon$时，就有$W(T)\subset W(S)+(\varepsilon)$，$W(S)\subset W(T)+(\varepsilon)$。

同理可定义$\overline{W(T)}$关于算子强拓扑及弱拓扑的连续性。此外，如同定义谱半径的连续性一样，也可以定义数值半径的连续性。

易见，如果$\overline{W(T)}$关于算子一致拓扑、强拓扑或弱拓扑是连续的，那么$w(T)$也具有相应的连续性。因此，如果$w(T)$是间断的，那么$\overline{W(T)}$也必定是间断的。

兹证函数$\overline{W(T)}$关于算子一致拓扑是连续的。事实上，任给$\varepsilon>0$，若$\|S-T\|<\varepsilon$，且$\|x\|=1$，则$|\langle(S-T)x,x\rangle|<\varepsilon$，从而$\langle Sx,x\rangle=\langle Tx,x\rangle+\langle(S-T)x,x\rangle\in W(T)+(\varepsilon)$。于是$W(S)\subset W(T)+(\varepsilon)$。对称地，$W(T)\subset W(S)+(\varepsilon)$。这就证明了$\overline{W(T)}$关于算子一致拓扑是连续的。于是，$w(T)$关于算子一致拓扑也是连续的。

这个证明属于 Brown。

但是，$\overline{W(T)}$关于算子强拓扑（从而关于算子弱拓扑）不必连续。为此，只要证明$w(T)$关于算子强拓扑不必连续即可。对$x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Ux=(0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则$U^*x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$(U^*)^nx=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$，故

$$\|(U^*)^nx\|=\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

即$\{(U^*)^n\}$在强拓扑意义下收敛于0。但$w((U^*)^n)=1(n=1,2,\cdots)$，故$w$关于算子的强拓扑并不连续。

23. 存在两个算子，它们之积的数值半径不等于它们的数值半径之积。

第一例 设 $S=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，

则 $w(S)=w(T)=\frac{1}{2}$，而 $w(ST)=1$，故 $w(ST)>w(S)w(T)$.

第二例 设 $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

则 $w(S)=w(T)=1$，而 $w(ST)=0$，故 $w(ST)<w(S)w(T)$.

注 对 Hilbert 空间H而言，若 $T\in L(H)$，则有 $w(T^n)\leqslant w(T)^n$(参看[126]，pp.115—117).

Crabb[73]指出，不等式 $w(T^n)\leqslant w(T)^n$不能推广到赋范线性空间的情形. 他构造了一个赋范线性空间上的有界线性算子T，使 $w(T^n)>w(T)^n$.

24. 谱与近似谱不同的算子.

对 $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Tx=(0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则T为 l^2 到 $R(T)$上的等距算子且$\|T\|=1$. 于是不难证明，$\sigma(T)$就是单位闭圆盘.

另一方面，由于每一算子的谱的边界包含于近似点谱，故 $\sigma_a(T)$包含单位圆周. 如果$|\lambda|<1$，则对一切 x，有

$$\begin{aligned}\|Tx-\lambda x\|&\geqslant|\|Tx\|-\|\lambda x\||=|\|x\|-\|\lambda x\||\\&=|1-|\lambda||\|x\|,\end{aligned}$$

因此，$T-\lambda$ 下有界，这就证明了 $\sigma_a(T)$正好是单位圆周. 于是，$\sigma(T)\neq\sigma_a(T)$.

25. 相对谱是单位圆周的算子.

对 $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Ux=(0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则算子U没有特征值. 兹证U的相对谱是单位圆周. 为此，先证

引理 (i)若算子T有左逆算子，则T必相对可逆；反之，若T具有平凡的核，即$\{x:Tx=0\}=\{0\}$，且T相对可逆，则它必有左逆.

算子.

(ii)若T有左逆算子,则T必下有界;反之,若T下有界,则T必有左逆算子.

证 (i)T有左逆算子蕴涵T相对可逆是显然的. 反之,若T相对可逆,即存在算子S使$TST=T$,则$T(I-ST)=0$. 因T的核是平凡的,故$I-ST=0$,即T有左逆算子.

(ii)设T有左逆算子,即存在算子S使$ST=I$,则对每一x,有

$$\|x\|=\|STx\|\leqslant\|S\|\|Tx\|,$$

故T下有界. 反之,设T下有界,则T有唯一确定的逆映射S,它把T的(闭)值域射到全空间上. S是有界线性映射,可把S作如下扩张:在T的值域的直交补上定义其值为0. 于是,S的扩张后的算子就是T的左逆算子. 引理证毕.

由于算子U没有特征值,故由引理可知,U的相对谱与近似点谱是相同的,而U的近似点谱是单位圆周(参看例24),从而它的相对谱也是单位圆周.

注 相对谱的概念是由 Asplund[34]于 1958 年引入的.

26. 相对谱不闭的算子.

算子的谱必是闭集,然而算子的相对谱未必是闭集. 下面的例子属于 Asplund[34]:

设A是 Hilbert 空间H上的有界线性算子,α为非零常数,M是算子矩阵:

$$M=\begin{pmatrix}\alpha I & 0\\ I & A\end{pmatrix},$$

则A相对可逆的充要条件是M为相对可逆的.

事实上,设M相对可逆,并设

$$N=\begin{pmatrix}P & Q\\ R & S\end{pmatrix}$$

是M的相对逆，即$MNM=M$. 由此得到 $\alpha QA=0$，$QA+ASA=A$. 因为 $\alpha\neq 0$，故 $QA=0$，从而 $ASA=A$，即 A 是相对可逆的. 反之，若 A 是相对可逆的，即存在 B 而有 $ABA=A$，令

$$N=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}AB & I-AB \\ -\frac{1}{\alpha}B & B\end{pmatrix}.$$

则容易验证，$MNM=M$，故M是相对可逆的.

其次，若$M=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ I & A\end{pmatrix}$，则对任何算子 A，M总是相对可逆的，这是因为若令

$$N=\begin{pmatrix}0 & I \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则有 $MNM=M$.

由上可知，若算子矩阵$M=\begin{pmatrix}I & 0 \\ I & A\end{pmatrix}$与算子 A的相对谱分别记为 Φ 和 Ψ，则有 $\Phi=\Psi\setminus\{1\}$. 兹取 A 为 l^2 上的右移算子，则 A 的相对谱是单位圆周(参看例25)，从而M的相对谱不是闭的.

第十四章　紧算子和Riesz算子

引言

这一章向读者介绍紧算子，Riesz算子和严格奇异算子方面的反例，基本定义和定理给出如下：

由赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子T，当其把X的任意有界集变成Y的列紧集时，称为紧线性算子或全连续线性算子，简称紧算子或全连续算子.

由赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子T，当其把X的任意有界点列变成Y中的一个含有弱收敛子列的点列时，称为弱紧算子.

设T是赋范线性空间X到X的线性算子，M是X的线性子空间. 如果$T(M)\subset M$，则称M是T的不变子空间.

空间X本身与$\{0\}$是X中一切线性算子的不变子空间，称它们是平凡的不变子空间.

设X是线性空间，F是X到X的某些线性算子所成的算子集. 如果M是X的线性子空间，并且它对集F中每个算子都是不变的，就称M是F的不变子空间. 设X是赋范线性空间，$T\in L(X)$，$L(X)$中一切与T可换的算子全体记为F_T. 如果X的线性子空间M是F_T的不变子空间，就称M是算子T的超不变子空间.

显然，$T\in F_T$，故T的超不变子空间必是T的不变子空间.

设$\{\varphi_n\}$是可分Hilbert空间H中的完全的就范直交系. H上的有界线性算子T称为Hilbert-Schmidt算子，是指

$$|||T||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

设X为Banach空间，$T\in L(X)$，称T为Riesz算子，如果下述三条件成立：

(i) 对每一$\lambda\neq 0$及每一正整数n，方程$(\lambda I-T)^n x=0$的解所组成之集是X的有限维子空间，且当n充分大后，此子空间不依赖于n。

(ii) 对每一$\lambda\neq 0$及每一正整数n，$(\lambda I-T)^n$的值域是X的闭子空间，当n充分大后，此子空间不依赖于n。

(iii) T的特征值所组成之集最多有一个聚点为0。

关于 Riesz 算子，我们有下述定理：

定理 1 用$K(X)$代表 Banach 空间X到X的紧算子的全体，并令

$$k(T)=\inf\{\|T-C\|:C\in K(X)\},$$

则$T\in L(X)$为 Riesz 算子的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{k(T^n)\}^{\frac{1}{n}}=0.$$

定理 2 设$T\in L(X)$是 Riesz 算子，Y是T的不变子空间，则$T|Y$是 Riesz 算子.

定理 3 $T\in L(X)$是Riesz算子当且仅当T^*是Riesz算子.

设X，Y为赋范线性空间，T是具有定义域在X中而值域在Y中的有界线性算子. 我们称T为严格奇异算子，如果它在定义域的任一无穷维子空间上都没有有界的逆算子.

严格奇异算子的概念是由 Kato[170]引入的.

1. 非紧的有界线性算子.

设X为一无穷维 Banach 空间，I是X到X上的恒等算子，则I把X中的单位球映成X中的单位球. 由于$\dim X=\infty$，故单位球不是列紧的，即有界线性算子I不是紧算子.

注 对某些类型的 Banach 空间X，凡有界线性算子$T:c_0\to X$都是紧算子. 这方面的已知结果有：凡有界线性算子$T:c_0\to l^p$ $(1\leqslant p<+\infty)$都是紧的；若X是弱序列完备的，则凡有界线性算子$T:c_0\to X$都是紧的. 于是自然地产生问题：还有哪些 Banach

空间X使有界线性算子$T: c_0 \to X$都是紧的？这种空间的特征是什么？李容录[7]研究了这个问题.

2. 存在某个非紧算子，它把弱收敛点列映成强收敛点列.

容易证明，如果T是由Banach空间X到Banach空间Y中的紧算子，那么T把X中的弱收敛点列映成Y中的强收敛点列. 反之，如果X是自反Banach空间，而有界线性算子T把X中的弱收敛点列映成Y中的强收敛点列，那么T必是紧算子. 如不设X自反，则逆命题不成立. 例如，Banach空间l中点列的强收敛性与弱收敛性是等价的(参看第四章例2)，从而恒等算子I把l中的弱收敛点列映成l中的强收敛点列，但I不是紧算子.

3. 存在由某个Banach空间到另一Banach空间的强收敛的紧算子列，其极限不是紧算子.

可以证明，若$\{T_n\}$是由赋范线性空间X到Banach空间Y中的紧线性算子列，且$\{T_n\}$一致收敛于T，即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0,$$

则T也是紧线性算子(参看[14]，p.143). 应当注意，在这个命题中一致收敛的条件不能减弱为强收敛. 例如，设T_n是由Banach空间l^2到其自身的算子：

$$T_n x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots),$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^2$. 显然，对每一$n$，$T_n$都是紧线性算子. 令$Ix = x\ (x \in l^2)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n x - Ix\| = 0,$$

即$\{T_n\}$强收敛于I，但I不是紧算子.

4. 存在由某个Banach空间到另一赋范线性空间中的一致收敛的紧算子列，其极限不是紧算子.

可以证明，若X是赋范线性空间，Y是Banach空间，$\{T_n\} \subset L(X, Y)$是紧算子列，且它一致收敛于$T \in L(X, Y)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0,$$

则T也是紧算子. 应当注意,若Y不完备,则上述命题不再成立。例如，设T_0为c_0到l^2内由等式

$$T_0x=\left\{\frac{\xi_k}{k}\right\},\quad x=\{\xi_k\}\in c_0$$

定义的有界线性算子，令$Y=R(T_0)\subset l^2$,并令T等于T_0. 于是，T是由c_0到l^2的子空间Y上的有界线性算子. 对$x=\{\xi_k\}\in c_0$,令

$$T_n\{\xi_k\}=\{\eta_k\},$$

这里，当$1\leqslant k\leqslant n$时$\eta_k=\dfrac{\xi_k}{k}$,而当$k>n$时$\eta_k=0$,则对每一n,T_n是由c_0到Y内的有界线性算子，且

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0,$$

即$\{T_n\}$一致收敛于T. 此外，由于$R(T_n)$是l^2的有限维子空间，故T_n是紧的.

兹证T不是紧算子. 事实上，令$x_k=(1,1,\cdots,1,0,\cdots)$,其中前$k$个坐标均为1，则$\|x_k\|_{c_0}=1$,且$\|Tx_k-y\|_{l^2}\to 0(k\to\infty)$,这里$y=(1,\dfrac{1}{2},\cdots)\in l^2$. 但$y\notin Y$, 这是因为$Tx=y$蕴涵$x=(1,1,\cdots)$, 而$x\notin c_0$. 由此可知,$\{Tx_k\}$中不存在在$Y$中收敛的子列，即$T$不是紧算子.

5. 存在由某个赋范线性空间X到Y的紧算子T_0, 使由等式$Tx=T_0x$确定的X到$R(T_0)$上的算子T不是紧的.

对$x=\{\xi_k\}\in c_0$, 令$T_0x=\left\{\dfrac{\xi_k}{k}\right\}\in l^2$, 则$T_0$是$c_0$到$l^2$内的有界线性算子，从而它是$c_0$到$l^2$的紧算子(参看例1的注). 另一方面，设$T$是由等式$Tx=T_0x(x\in c_0)$确定的$c_0$到$R(T_0)\subset l^2$上的线性算子，由例4可知，$T$不是紧算子.

6. 存在某个非紧算子，其共轭算子却是紧算子.

容易证明，若X, Y都是赋范线性空间，$T\in L(X,Y)$是

紧算子，则T的共轭算子T^*也是紧算子（参看[14]，pp.144—145）。于是自然产生问题，如果有界线性算子T的共轭算子T^*是紧的，那么T是否必为紧的？一般说来，此时T不必是紧的。例如，设Y是例4中的赋范线性空间，对$x=\{\xi_k\}\in c_0$，令

$$T\{\xi_k\}=\left\{\frac{\xi_k}{k}\right\},\quad T_n\{\xi_k\}=\{\eta_k\},$$

这里，当$1\leqslant k\leqslant n$时$\eta_k=\dfrac{\xi_k}{k}$，而当$k>n$时$\eta_k=0$，则对每一n，T_n都是紧算子，从而T_n^*也都是紧算子。又因$\{T_n\}$按算子空间$L(c_0,Y)$的范数收敛于T，故$\{T_n^*\}$按算子空间$L(Y^*,c_0^*)$的范数收敛于T^*，而c_0^*完备，因此T^*必为紧算子。然而由例4可知，T不是紧算子。

注　若X，Y都是Banach空间，$T\in L(X,Y)$，则T为紧算子的充要条件是T^*为紧算子。上述反例说明了在这个命题中，Y是完备的条件不可去掉。

7．存在某个非紧算子，其平方是紧算子．

容易证明，若T是紧算子，则T^2也是紧算子。然而逆命题并不成立。例如，设T是如下定义的算子：

$$Tx=(0,\xi_1,0,\xi_3,0,\xi_5,0,\cdots),$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$。于是，$T$是定义在$l^2$上而值域含于$l^2$中的有界线性算子。兹证$T$不是紧算子。事实上，取

$$x_1=(1,0,0,\cdots),\quad x_3=(0,0,1,0,\cdots),\cdots,$$
$$x_{2n-1}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),\cdots,$$

其中1在第$2n-1$的位置上，则$\{x_{2n-1}\}$是l^2中的一个有界集。但因

$$Tx_{2n-1}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),$$

故$\|Tx_{2n-1}-Tx_{2m-1}\|=\sqrt{2}\,(n\neq m)$，因此$\{Tx_{2n-1}\}$不列紧，即$T$不是紧算子。另一方面，据算子$T$的定义，我们得到

$$T^2x=T(Tx)=T(0,\xi_1,0,\xi_3,0,\cdots)=0,$$

故 T^2 是紧算子.

8. 存在某个非恒等的有界线性算子 T，使对任何正整数 n，T^n 均非紧算子.

设 $\Delta=[0,\ 1]$，$z(t)\in L^\infty(\Delta)$，对 $x\in L^p(\Delta)(1<p<+\infty)$，令 $Tx=z(t)x(t)$，则 T 为 $L^p(\Delta)$ 到 $L^p(\Delta)$ 内的有界线性算子. 此外，$T=0$ 当且仅当 $z(t)$ 在 Δ 上几乎处处等于零. 显然，

$$T^nx=z^n(t)x(t),\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

兹证，若 $m\Delta\{t:z(t)\neq 0\}>0$，则对每一 n，T^n 均非紧算子. 事实上，对任意正整数 n，存在 $\varepsilon>0$ 及 Δ 的正测度子集 Δ_1，使当 $t\in\Delta_1$ 时 $|z^n(t)|\geqslant\varepsilon$. 令 $\Delta_1=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，其中 E_i 为 Δ_1 的两两不相交的可测子集. 在 Δ 上定义函数：

$$x_i(t)=\begin{cases}\text{非零常数}, & t\in E_i,\\ 0, & t\in\Delta\setminus E_i,\end{cases}$$

并使 $\|x_i\|_{L^p(\Delta)}=\left(\int_\Delta|x_i(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}=1$. 不难看出，在 E_i 上，$z^n(t)x_i(t)\neq 0$，而在 $\Delta\setminus E_i$ 上，$z^n(t)x_i(t)=0$. 因此，当 $i\neq j$ 时，对任意 $y\in L^q(\Delta)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，恒有

$$\begin{aligned}&\int_\Delta|z^n(t)[x_i(t)-x_j(t)]y(t)|dt\\ &\geqslant\int_{E_i}|z^n(t)[x_i(t)-x_j(t)]y(t)|dt\\ &=\int_{E_i}|z^n(t)||x_i(t)y(t)|dt\\ &\geqslant\varepsilon\int_\Delta|x_i(t)y(t)|dt,\end{aligned}$$

上述不等式蕴涵了 $\|T^nx_i-T^nx_j\|_{L^p(\Delta)}\geqslant\|x_i\|_{L^p(\Delta)}\varepsilon=\varepsilon$. 由此可

知，有界点列$\{x_i\}$不含有子列$\{x_{i_k}\}$，使$\{T^n x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛，即$T^n$不是紧算子.

9．存在某个有界线性算子 T，使当 $1\leqslant q<p$ 时，T^q 不是紧算子，而当 $q\geqslant p$ 时，T^q是紧算子.

考虑定义在区间 $\Delta=[0,1]$上的函数列：

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}}, & t\in\Delta_1=\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 0, & t\in\Delta\setminus\Delta_1,\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}(2^{\frac{1}{2}})^2, & t\in\Delta_2=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),\\ 0, & t\in\Delta\setminus\Delta_2,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}(2^{\frac{1}{2}})^n, & t\in\Delta_n=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),\\ 0, & t\in\Delta\setminus\Delta_n,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

显然，函数列$\{\varphi_n\}$在 Hilbert 空间$L^2(\Delta)$中是直交的. 令

$$\begin{aligned}K(t,s)&=\varphi_2(t)\varphi_3(s)+\varphi_4(t)\varphi_5(s)+\cdots\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n+1}(s)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2n}(t)\overline{\varphi_{2n+1}(s)}.\end{aligned}$$

上面的级数在 $\Delta\times\Delta$ 上是收敛的，这是因为对每一$(t,s)\in\Delta\times\Delta$，该级数中至多有一项不为零. 任取 $t\in\Delta_{2n}(n=1,2,\cdots)$ 及 $x\in L^2(\Delta)$，我们有

$$\begin{aligned}y(t)=Tx(t)&=\int_{\Delta}K(t,s)x(s)ds\\ &=\varphi_{2n}(t)\int_{\Delta}x(s)\overline{\varphi_{2n+1}(s)}\,ds\\ &=\langle x,\varphi_{2n+1}\rangle\varphi_{2n}(t).\end{aligned}$$

又，对每一 $t\in\Delta_{2n-1}(n=1,2,\cdots)$，显然有 $y(t)=0$. 因此，对任何 $t\in\Delta$，恒有

$$y(t)=Tx(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_{2n+1}\rangle\varphi_{2n}(t).$$

据 Bessel 不等式，

$$\|Tx\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,\varphi_{2n+1}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2,$$

所以由 $L^2(\Delta)$ 到 $L^2(\Delta)$ 内的线性算子 T 是有界的. 因为

$$\begin{aligned}\langle y,\varphi_{2n+1}\rangle&=\langle Tx,\varphi_{2n+1}\rangle\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,\varphi_{2k+1}\rangle\langle\varphi_{2k},\varphi_{2n+1}\rangle\\&=0\\&(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故得 $T^2x=Ty=\sum_{n=1}^{\infty}\langle y,\varphi_{2n+1}\rangle\varphi_{2n}(t)=0$，即 $T^2=0$.

我们要把 $T^2=0$ 推广到对任意给定的正整数 p，有 $T^p=0$. 为此，令

$$\begin{aligned}K(t,s)=&\{\varphi_p(t)\varphi_{p+1}(s)+\varphi_{p+1}(t)\varphi_{p+2}(s)\\&+\cdots+\varphi_{2p-2}(t)\varphi_{2p-1}(s)\}\\&+\{\varphi_{2p}(t)\varphi_{2p+1}(s)+\cdots+\varphi_{3p-2}(t)\varphi_{3p-1}(s)\}\\&+\{\varphi_{3p}(t)\varphi_{3p+1}(s)+\cdots+\varphi_{4p-2}(t)\varphi_{4p-1}(s)\}\\&+\cdots\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_{np}(t)\varphi_{np+1}(s)+\cdots+\varphi_{np+p-2}(t)\varphi_{np+p-1}(s)\}.\end{aligned}$$

类似于 $p=2$ 的情形，容易证明，$T, T^2, \cdots, T^{p-1}$ 均非零算子，而 $T^p=0$。

其次，据 $\{\varphi_n\}$，$K(t,s)$ 及 T 的定义，得到

$T\varphi_1=\cdots=T\varphi_p=0$,

$T\varphi_{p+1}=\varphi_p, T\varphi_{p+2}=\varphi_{p+1}, \cdots, T\varphi_{2p-1}=\varphi_{2p-2}, T\varphi_{2p}=0$,

$T\varphi_{2p+1}=\varphi_{2p}, T\varphi_{2p+2}=\varphi_{2p+1}, \cdots, T\varphi_{3p-1}=\varphi_{3p-2}, T\varphi_{3p}=0$,

$\cdots$

显然，T 映直交函数列 $(\varphi_{2p-1}, \varphi_{3p-1}, \cdots)$ 为直交函数列 $(\varphi_{2p-2}, \varphi_{3p-2}, \cdots)$。因此，$T$ 不是紧算子．同理，$T^q(1\leqslant q<p)$ 映直交函数列 $(\varphi_{2p-1}, \varphi_{3p-1}, \cdots)$ 为直交函数列 $(\varphi_{2p-1-q}, \varphi_{3p-1-q}, \cdots)$，因而 T^q 也不是紧算子，另一方面，因为当 $q\geqslant p$ 时，$T^q=0$，故 $T^q(q\geqslant p)$ 都是紧算子．

10．存在某个由 $L[0,1]$ 到 $L[0,1]$ 内的非紧的有界线性积分算子 $Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$，而核 $K(t,s)$ 却是有界可测的．

可以证明，若 $K(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可测，且当 $1<p<+\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，有

$$\int_0^1\left(\int_0^1 |K(t,s)|^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dt<+\infty,$$

则由空间 $L^p[0,1]$ 到 $L^p[0,1]$ 内的线性积分算子

$$Tx(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

必是紧的（参看[333]，p.320）．于是，自然提出问题：若 $K(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有界可测，则由(1)式定义的由空间 $L[0,1]$ 到 $L[0,1]$ 内的积分算子是否必为紧的？这个问题的答案是否定的．下面的例子属于 Neumann（参看[138]）．

在区间 $[0,1]$ 上定义函数列 $\{\varphi_n\}$：

$$
\varphi_1(t)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi t, & 0<t<\frac{1}{2}, \\ 2, & \frac{3}{4}<t<\frac{7}{8}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
$$

$$
\varphi_2(t)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi t, & 0<t<\frac{1}{2}, \\ -2, & \frac{3}{4}<t<\frac{7}{8}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

$$
\varphi_3(t)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\sin 4\pi t, & 0<t<\frac{1}{2}, \\ 2^2, & \frac{15}{16}<t<\frac{31}{32}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

$$
\varphi_4(t)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\sin 4\pi t, & 0<t<\frac{1}{2}, \\ -2^2, & \frac{15}{16}<t<\frac{31}{32}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}
$$

一般，

$$
\varphi_{2n-i}(t)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{2}}\sin 2n\pi t, & 0<t<\frac{1}{2}, \\ (-1)^{i+1}2^n, & 1-2^{-2n}<t<1-2^{-2n-1}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

这里，$n=1,2,\cdots,i=0,1,\cdots$。显然，$\{\varphi_n\}$是空间 $L[0,1]$中的直交系，即

$$
\int_0^1 \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt=0\ (n\neq m)。
$$

令

$$K(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}[\varphi_{2n-1}(t)\varphi_{2n-1}(s)-\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n}(s)],$$

则对每一 $t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$，上面的级数至多有一项不为零，因而 $|K(t,s)|\leqslant 2^{\frac{3}{2}}$，即 $K(t,s)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的有界可测函数。此外，有 $T\varphi_{2n-1}=2^{-n}\varphi_{2n-1}$, $T\varphi_{2n}=-2^{-n}\varphi_{2n}$。因此，若令

$$\psi_n(t)=2^n[\varphi_{2n-1}(t)-\varphi_{2n}(t)],$$

则有 $T\psi_n=\varphi_{2n-1}+\varphi_{2n}$，从而得到

$$\|\psi_n\|_1=2^n\int_0^1|\varphi_{2n-1}(t)-\varphi_{2n}(t)|dt=1.$$

而当 $n\neq m$ 时，有

$$\begin{aligned}\|T\psi_m-T\psi_n\|_1&=\int_0^1|[\varphi_{2m-1}+\varphi_{2m}]-[\varphi_{2n-1}+\varphi_{2n}]|dt\\&=2^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}|\sin 2m\pi t-\sin 2n\pi t|dt\\&=2^{\frac{5}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}|\sin(m-n)\pi t||\cos(m+n)\pi t|dt\\&\geqslant 2^{\frac{5}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin^2(m-n)\pi t\cos^2(m+n)\pi t\,dt\\&=2^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此，T 映有界点列 $\{\psi_n(t)\}$ 为一个不含收敛子列的点列 $\{T\psi_n\}$，故 T 不是紧算子.

11. 存在无穷阵 (α_{ij}) 适合 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2=+\infty$，而算子 $y=Tx$：

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j\ (x=\{\xi_n\}\in l^2,\ y=\{\eta_n\}\in l^2)$$ **却是紧的.**

容易证明，若无穷阵 (α_{ij}) 适合条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<+\infty, \tag{1}$$

作算子T如下：

$$y=Tx:\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j(i=1,2,\cdots), \tag{2}$$

其中 $x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}$，则T是一个由空间 l^2 到 l^2 内的紧算子。应当注意，这个命题之逆并不成立。即，如果由(2)式定义的映 l^2 到 l^2 内的算子T是紧的，那么无穷阵(a_{ij})不必适合条件(1)。例如，我们考虑无穷阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \frac{1}{\sqrt{i}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

显然

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty.$$

另一方面，任取 $x=\{\xi_n\}\in l^2$，则 $\eta_n=\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}$，因此，$y=\{\eta_n\}\in l^2$，而且由等式 $y=Tx$ 确定的算子T是 l^2 到 l^2 内的有界线性算子。兹证T是紧的。为此，任取 l^2 中的有界集A，即存在常数M，使对任何 $x=\{\xi_n\}\in A$，都有

$$\|x\|=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant M.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，故对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时就有 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{\varepsilon}{M}$，从而

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{M}\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon.$$

这就说明了 $y=Tx(x\in A)$ 的前 n_0 个坐标 $\eta_1,\cdots,\eta_{n_0}$ 作成的元素 $(\eta_1,\cdots,\eta_{n_0},0,\cdots)$ 的全体 B 构成集合 $T(A)$ 的一个 ε 网．因为 B 是 l^2 中的一个有限维子空间中的有界集，故 B 是列紧的，即 $T(A)$ 存在列紧的 ε 网，而空间 l^2 是完备的，从而 $T(A)$ 是列紧集，即 T 是紧算子．

12．存在 Hilbert 空间上的某个紧算子，它不是 Hilbert-Schmidt 算子．

可以证明，Hilbert-Schmidt 算子必为紧算子．然而，Hilbert 空间上的紧算子不必是 Hilbert-Schmidt 算子．例如，设 $\{\varphi_n\}$ 是可分 Hilbert 空间 H 中的完全的就范直交系，令 $T\varphi_n=n^{-\frac{1}{2}}\varphi_n$，$n=1,2,\cdots$．易见，$T$ 是紧的．但因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T\varphi_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

故 T 不是 Hilbert-Schmidt 算子．

13．存在某个 Hilbert-Schmidt 算子 T，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle T\varphi_n,\varphi_n\rangle$ 发散，其中 $\{\varphi_n\}$ 是完全的就范直交系．

可以证明，若 A，B 是可分 Hilbert 空间 H 上的 Hilbert-Schmidt 算子，$\{x_n\}$ 是 H 中的完全的就范直交系，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle Ax_n,$

$B^*x_n\rangle$绝对收敛于一个与$\{x_n\}$有关的极限．由此可知，若$T=BA$，而且A，B均为Hilbert-Schmidt算子，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx_n, x_n\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle Ax_n, B^*x_n\rangle$$

收敛．应当注意，当Hilbert-Schmidt算子T不能表成两个Hilbert-Schmidt算子之积时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx_n, x_n\rangle$不必收敛．例如，设$\{\varphi_n\}$是可分Hilbert空间$H$中的完全的规范直交系，令$T\varphi_n=\frac{\varphi_n}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T\varphi_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

故T是Hilbert-Schmidt算子．另一方面，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\langle T\varphi_n,\varphi_n\rangle$是发散的．

14．紧算子和它的共轭算子之间的关系．

设X,Y均为无穷维赋范线性空间，我们用$K(X,Y)$代表定义域为X而值域含于Y中的紧线性算子的全体．设$T\in K(X,Y)$，称T有逆算子T^{-1}，是指T是由X到$R(T)$上的一对一的映射．若$T\in K(X,Y)$，则$T^*\in K(Y^*,X^*)$，且$\|T^*\|=\|T\|$．对于T而言，它有下列几种可能的分类：

I　$R(T)=Y$(记作$T\in$ I)．

II　$R(T)\neq Y$，但$\overline{R(T)}=Y$(记作$T\in$ II，以下准此)．

III　$\overline{R(T)}\neq Y$．

1．T^{-1}存在且有界．

2．T^{-1}存在而无界.

3．T^{-1}不存在.

若 $T\in$ II且 $T\in$ 1.，则记作$T\in \mathrm{II}_1$. 于是T就有 9 种可能的分类. 同样，T^*也有 9 种可能的分类. 因此，(T,T^*) 就有 81 种分类. 下图是关于(T,T^*)的 81 种分类法. 图中被划去的小方块是指不论怎样选择空间 X 和 Y 及紧算子 T，(T,T^*)不可 能属于该小方块所示的类(参看[311])，未被划去的小方块，意味着可以适当选择空间 X,Y 及紧算子 T，使(T,T^*)属于所示的类.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$　设 $X=Y=l^2$，无穷阵(α_{ij})为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 2^{-1} & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 2^{-2} & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & \text{\Large 0} & & & 2^{1-k} & & & \\ & & & & & \ddots & & \end{pmatrix},$$

则$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<+\infty$. 作算子 T 如下：

$$y=Tx:\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j(i=1,2,\cdots),\text{其中 } x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\},$$

则 T 是一个由 X 到 Y 内的紧算子. 又易见 $T=T^*$.

因为仅有有限多个非零坐标的向量全部属于 $R(T)$，而这种向量的全体在 Y 中稠密，可见 $R(T)$在Y中也稠密，即$\overline{R(T)}=Y$. 由于 $y=(1,2^{-1},\cdots,\ 2^{1-k},\ \cdots)\in Y\setminus R(T)$，故 $R(T)\neq Y$，因而 $T\in$ II. 又因$X=Y$是无穷维的，而 T 为紧算子，所以 T^{-1} 无界(参看[14]，p.142)．因此，$T\in \mathrm{II}_2$. 而$T=T^*$，故$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_2)$　设$X=Y=l^2$，对$x=\{\xi_n\}\in X$，令

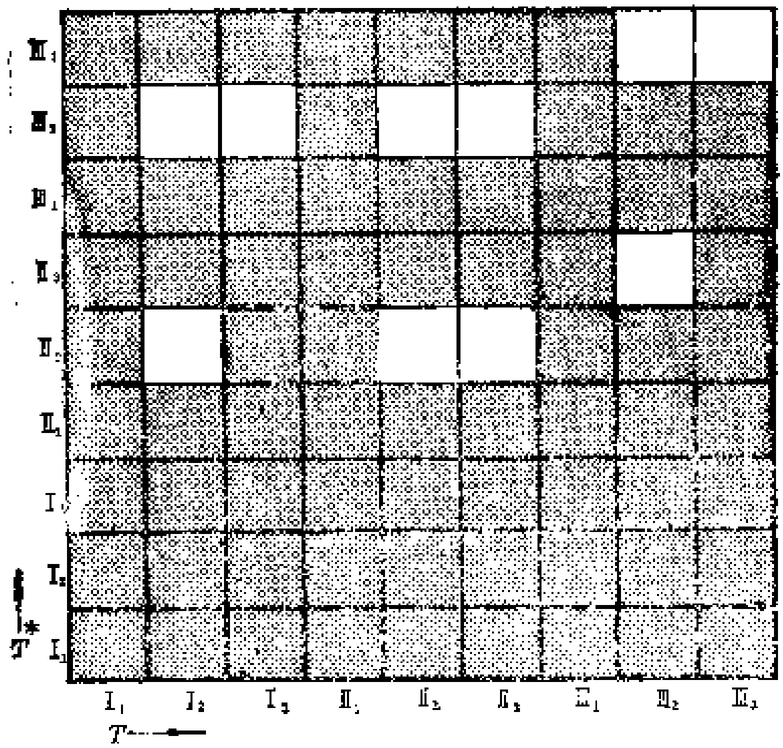


图 6

$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(2^{-1}\xi_2,2^{-2}\xi_3,\cdots)$，则$T$是由$X$到$Y$中的紧算子且$R(T)\neq Y$，$\overline{R(T)}=Y$. 因对任何实数$\alpha$，都有

$$T(\alpha,0,0,\cdots)=0,$$

可见T^{-1}不存在. 因之，$T\in \mathrm{II}_3$. 又因为

$$T^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,2^{-1}\xi_1,2^{-1}\xi_2,\cdots),$$

所以$\overline{R(T^*)}\neq X^*$. 此外，$(T^*)^{-1}$存在而无界，因而$T^*\in \mathrm{III}_2$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_2,\mathrm{II}_3)$　取T为$(\mathrm{II}_3,\mathrm{III}_2)$中的共轭算子. 因为紧算子的共轭算子也是紧的，故$T$为紧算子，且$T\in \mathrm{III}_2$，$T^*\in \mathrm{II}_3$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_3,\mathrm{III}_3)$　设$X=Y=l^2$，对$x=\{\xi_n\}\in X$，令

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\cdots,0,\xi_1,0,\cdots),$$

上式右端中的ξ_1在第n个位置上，则T为X到Y内的紧算子，且$T\in \mathrm{III}_3$，$T^*\in \mathrm{III}_3$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$　设$X=l^2$，对$x=\{\xi_k\}\in X$，令

$$T_0\{\xi_k\}=\left\{\frac{\xi_k}{k}\right\},$$

则 T_0 为由 X 到 l^2 内的紧算子，且 $T_0^*=T_0$. 易见，$R(T_0)\neq l^2$，$\overline{R(T_0)}=l^2$，且 T_0^{-1} 存在而无界，故$T_0\in \mathrm{II}_2$. 设$Y=R(T_0)\subset l^2$，并取 T 为 T_0，则 T 是由 X 到 Y 上的一对一的有界线性算子. 兹证 T 也是紧的. 事实上，设$\{x_n\}$是 X 中的有界点列，由于 T_0 是紧的，故存在$\{x_n\}$的子列$\{v_n\}$，使$\{T_0v_n\}$收敛于某点$y\in l^2$. 因为X是自反的Banach空间，而 $\{v_n\}$ 是有界点列，故$\{v_n\}$中必有子列$\{z_n\}$，它弱收敛于某点$x\in X$. 于是由 T_0 的连续性可知，$T_0z_n\xrightarrow{\text{弱}}T_0x$. 因为$T_0z_n\to y$，故 $T_0z_n\xrightarrow{\text{弱}}y$，因而 $y=T_0x$. 由此可知，$Tv_n\to T_0x\in Y$，即T是紧的. 再由$(T_0,T_0^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{II}_2)$得到$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_3,\mathrm{III}_2)$ 设 $X=l^2$，并令

$$T_0(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\left(\xi_2,\ \frac{\xi_3}{2},\ \frac{\xi_4}{3},\cdots\right),$$

则T_0是由X到l^2内的紧算子. 令 $Y=R(T_0)\subset l^2$，T 取作 T_0，于是，T 是由 X 到 Y上的紧算子. 易见，T^{-1} 不存在，故 $T\in\mathrm{I}_3$. 因

$$T^*x=\left(0,\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\cdots\right),$$

故$\overline{R(T^*)}\neq X^*$，且 T^* 是由 Y^* 到 $R(T^*)$上的一对一的映射，因而$(T^*)^{-1}$ 存在，但它是无界的，故 $T^*\in\mathrm{III}_2$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{II}_2,\mathrm{III}_2)$ 设$X=l$，$Y=l^2$，I 是由 X 到 Y 上的恒等算子. 由不等式$\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$可知，I 是有界线性算子. 对 $x=\{\xi_n\}\in l^2$，令

$$Kx=\left(\xi_1,\ \frac{\xi_2}{2},\ \frac{\xi_3}{3},\cdots\right),$$

则 K 是由 l^2 到 l^2 内的紧算子，从而 $T=KI$ 是 X 到 Y 内的紧算子. 易见，$\overline{R(T)}=Y$ 且 T^{-1} 存在而无界，故 $T\in\mathrm{II}_2$. 又因为

$$T^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\left(\xi_1,\ \frac{\xi_2}{2},\cdots\right),$$

$Y^*=l^2, X^*=l^\infty$，而$\overline{R(T^*)}=Y^*$，故$\overline{R(T^*)}\neq X^*$，且$(T^*)^{-1}$存在而无界，故$T^*\in \mathrm{III}_2$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{III}_2,\mathrm{III}_3)$　设$X=l, Y=l^2$，对$x=\{\xi_k\}\in X$，令

$$Tx=\left(0,\ \frac{\xi_1}{2},\ \frac{\xi_2}{3},\cdots\right),$$

则T为X到Y内的紧算子．显然，$T\in \mathrm{III}_2$．因为T是紧算子，所以T^*也是紧算子，从而$R(T^*)$是可分的．但$X^*=l^\infty$不可分，故$\overline{R(T^*)}\neq X^*$，即$T^*\in \mathrm{III}$．又，容易证明，$T^*$不存在逆算子，因此$T^*\in \mathrm{III}_3$.

$(T,T^*)\in(\mathrm{I}_2,\mathrm{III}_2)$　设$X=l, Y=l^2$，$T_1\{\xi_k\}=\left\{\dfrac{\xi_k}{k}\right\}$，则$T_1$是由$X$到$Y$内的紧算子，且$(T_1)^{-1}$存在而无界(参看本例的$(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$)．设$T$作为$T_1$而一对一地映$X$到$Y=R(T_1)$上，则$T$是有界线性算子．兹证$T$是紧的．为此，取$X$的单位球中的点列$\{x_n\}$，因$T_1$是紧的，故存在$\{x_n\}$的子列$\{v_n\}$，使$Tv_n\to y=\{\eta_k\}\in R(T_1)$．由此可知，若令

$$v_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots),$$

则有$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=k\eta_k\ (k\geqslant 1)$．因此对任意正整数$m$，有

$$\sum_{k=1}^m|k\eta_k|\leqslant\sum_{k=1}^m|k\eta_k-\xi_k^{(n)}|+\sum_{k=1}^m|\xi_k^{(n)}|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^m|k\eta_k-\xi_k^{(n)}|+1\to 1\ (n\to\infty).$$

于是对任何正整数m，都有$\sum\limits_{k=1}^m|k\eta_k|\leqslant 1$，即$x=\{k\eta_k\}\in l$，因而得到

$$Tv_n\to y=Tx.$$

这就证明了T是紧的，从而T^*也是紧的，且$R(T^*)$可分．但X^*

$=l^2$ 不可分，且$(T^*)^{-1}$存在而无界，故$T^*\in \mathrm{III}_2$.

上面的分类法是由 Thorp[611]作出的.

15. 存在两个 Riesz 算子，其和与积均非 Riesz 算子.

设 $X=l^2$，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Sx=(0,\xi_1,0,\xi_3,0,\cdots),$$

$$Tx=(\xi_2,0,\xi_4,0,\cdots),$$

则

$$S(Tx)=(0,\xi_2,0,\xi_4,0,\cdots),$$

$$T(Sx)=(\xi_1,0,\xi_3,0,\cdots),$$

$$(S+T)x=(\xi_2,\xi_1,\xi_4,\xi_3,\cdots).$$

显然，$S,T\in L(X)$，且 $S^2=T^2=0$. 因此，当 $n\geqslant 2$ 时，$k(T^n)=k(S^n)=0$，其中

$$k(T)=\inf\{\|T-C\|:C\in K(X)\}.$$

据引言中的定理 1，S 与 T 都是 Riesz 算子. 然而，ST 是一个具有无穷维值域的射影算子，由此不难证明 ST 不是紧算子，即 $ST\notin K(X)$. 事实上，假如$ST\in K(X)$，我们把 ST 限制在 X 的子空间$(ST)X$ 上，它是$(ST)X$ 上的一个恒等算子，由于 ST 是紧的，故这个恒等算子也是紧的，从而$(ST)X$ 中的单位闭球是紧的，于是就导致$(ST)X$ 是有限维空间的谬论.

由于 Banach 空间中紧算子列的一致极限也是紧算子，因而紧算子空间 $K(X)$是有界线性算子空间 $L(X)$的一个闭子空间. 又，$(ST)^n=ST\notin K(X)$，故知

$$k((ST)^n)=k(ST)$$

$$=\inf\{\|ST-C\|:C\in K(X)\}>0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\{k((ST)^n)\}^{\frac{1}{n}}=1,$$

即 ST 不是 Riesz 算子. 同理可证 TS 也不是 Riesz 算子.

其次，因为$(S+T)^2=I$(恒等算子)，故$(S+T)^n=I$(n 为偶数)，而 $I\notin K(X)$，可见 $S+T$ 也不是 Riesz 算子.

注 设X是 Banach 空间，$S, T\in L(X)$. 若 S，T都是Riesz算子，且 $ST=TS$，则 $ST, S+T$ 也是 Riesz 算子(参看[88], pp.68—69)。上述反例表明了在这个命题中 S 与 T 可换的条件不可去掉.

16. 存在某个 Riesz 算子列，它的一致极限不是 Riesz 算子.

如所周知，由赋范线性空间X到 Banach 空间 Y的紧算子列的一致极限必为紧算子。于是自然要问：由 Banach 空间 X 到其自身的 Riesz 算子列的一致极限是否必为 Riesz 算子? 这个问题的答案是否定的. Kakutani 有例如下(参看[261])：

设 $X=l^2$，$\alpha_m=e^{-k}$，其中 $m=2^k(2l+1)$，$k, l=0,1,2,\cdots$，并在 X 上定义算子 T 如下：

$Te_m=\alpha_m e_{m+1}$，$m=1,2,\cdots$，其中 $e_m=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$.
易见，$T\in L(X)$，且$\|T\|=\sup\limits_{m\geq 1}\alpha_m$. 对每一正整数 n，有

$$T^n e_m=\alpha_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m+n-1}e_{m+n},$$

因此

$$\|T^n\|=\sup_m\{\alpha_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{m+n-1}\}.$$

此外，由$\{\alpha_m\}$的定义可知

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k-1}\geq\prod_{r=1}^{k-1}e^{-r2^{k-r-1}},$$

所以

$$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k-1})^{2^{1-k}}\geq\left(\prod_{r=1}^{k-1}e^{-\left(\frac{r}{2^{r+1}}\right)}\right)^2.$$

若令 $\sigma=\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{r}{2^{r+1}}$，则 $e^{-2\sigma}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

由此可知，T 不是拟幂零算子.

对每一正整数 k，我们定义算子 T_k 如下：

$$T_k e_m=\begin{cases}0, & m=2^k(2l+1),\\ \alpha_m e_{m+1}, & m\neq 2^k(2l+1).\end{cases}$$

易见，各个 T_k 均为幂零算子，从而它们都是 Riesz 算子，而且

$$(T-T_k)e_m=\begin{cases}e^{-k}e_{m+1}, & m=2^k(2l+1),\\ 0, & m\neq 2^k(2l+1).\end{cases}$$

因此，$\|T-T_k\|=e^{-k}$，即$\{T_k\}$在算子空间 $L(X)$中一致收敛于 T。

兹证 T 不是 Riesz 算子. 假如不然，那么，由于T的谱半径 $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}>0$，故存在非零数 $\lambda\in\sigma(T)$，且 λ 为T的特征值（参看[88]，pp.74—75）. 设 $x\in X$ 是使 $Tx=\lambda x$ 的非零元，并设 x 关于直交系$\{e_m\}$的 Fourier 展式为

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}c_m e_m,$$

则 $Tx=\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m\alpha_m e_{m+1}$，$\lambda x=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda c_m e_m$. 由此可知 $\lambda c_1=0$，$c_m\alpha_m=\lambda c_{m+1}$，$m=1,2,\cdots$，因而 $c_m=0$，$m=1,2,\cdots$. 此与 $x\neq 0$ 相矛盾，故 T 不是 Riesz 算子.

注　West[319]于 1966 年指出，若 Riesz 算子列$\{T_n\}$的一致极限 T 与 $T_n(n=1,2,\cdots)$均可换，则 T 也是 Riesz 算子.

17. 非紧的 Riesz算子.

设 $X=l^2$，$\{e_n\}$是X中的就范直交系，定义X上的算子A与B如次：$Ae_n=n^{-1}e_n$，$Be_{2n-1}=e_{2n}$，$Be_{2n}=0$，$n=1,2,\cdots$. 显然，$A\in K(X)$，$B^2=0$. 令$T=A+B$，则T^2是紧算子，因而T是 Riesz算子. 然而T不是紧算子，这是因为

$$Te_{2n-1}=(2n-1)^{-1}e_{2n-1}+e_{2n},$$

故$\{Te_{2n-1}\}$中不含有收敛子列.

这个例子是由 Gillespie 和 West[115]作出的.

18. 存在某个 Riesz 算子，其值域不可分.

下面的例子是由杨宗磐[12]作出的.

设 $X=l^\infty$, 对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$, 令

$$Tx=(0,\xi_3,0,\xi_5,0,\cdots),$$

则 T 是 Riesz 算子. 因为

$$R(T)=\{(0,\xi_3,0,\xi_5,0,\cdots):x=\{\xi_n\}\in X\},$$

可见 $R(T)$ 不可分.

注 因为紧算子的值域必定可分，故本例中的算子 T 必定不是紧算子.

19. 存在某个 Riesz 算子，不能把它分解成两个可换算子之和，其中一个是紧算子而另一个是拟幂零算子.

设 T 为例 17 中的非紧的 Riesz 算子，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<+\infty$，则

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n\right)=T\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}e_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}e_{2n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-1}c_{2n}e_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-1}c_{2n-1}e_{2n-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}e_{2n}.$$

由此可知，T 的非零特征值及对应的特征空间是由下述公式给出的：

$$\lambda_r=r^{-1},r=1,2,\cdots.$$

$$\begin{cases}E_{2r-1}=\text{span}\{e_{2r-1}+(2r-1)2re_{2r}\},\\ E_{2r}=\text{span}\{e_{2r}\},r=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{1}$$

这里，span$\{x\}$ 表由元 x 生成的 X 的 1 维子空间. 因此，当 $x\in E_r$ 时，$Tx=r^{-1}x$.

假如 $T=A_1+B_1$，其中 A_1 是紧算子而 B_1 是拟幂零算子，且 $A_1B_1=B_1A_1$，则 $TB_1=B_1T$. 因此，若对某个 r 有 $x\in E_r$，则

$$T(B_1x)=B_1(Tx)=B_1(r^{-1}x)=r^{-1}B_1x,$$

从而 $B_1x\in E_r$. 于是,E_r是 B_1的不变子空间. 由于 E_r是 1 维子空间,故 $\sigma(B_1|E_r)$只有一个特征值组成. 此外,$B_1|E_r$ 也是拟幂零算子,因而

$$\sigma(B_1|E_r)\subset\sigma(B_1)=\{0\}.$$

于是 $B_1|E_r$是零算子. 由(1)可知,$B_1e_r=0(r=1,2,\cdots)$,所以 $B_1=0$,从而 $T=A_1$是紧算子,此为矛盾.

注 West[319]曾证明:若 H 是 Hilbert 空间,$T\in L(H)$ 是 Riesz 算子,则T可表为某个紧算子A及某个拟幂零算子B之和:$T=A+B$. 上述反例表明,此时还不能断定A与B可换. 又,能否把 West定理中的 Hilbert 空间换成 Banach 空间? 这是尚未解决的一个问题.

20. 非弱紧的 Riesz 算子.

设$X=l$,对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$,令

$$Tx=(\xi_2,0,\xi_4,0,\cdots),$$

则 $T\in L(X)$,且 $T^2=0$,从而T是 Riesz 算子.

兹证T不是弱紧算子. 假如不然,则

$$H=\left\{(\xi_2,0,\xi_4,0,\cdots):\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\leqslant1\right\}$$

是 l 中的相对弱紧集. 由于H是单位闭球与偶数足码坐标均为 0 的闭子空间之交,因而它是一个强闭的凸集. 于是据 Banach-Mazur 定理(参看[16]),H是弱闭集. 换言之,H是弱紧集,从而是序列弱紧集. 但是,Banach 空间 l 中点列的弱收敛性与强收敛性是等价的,故H是 l 中的强紧集,此为矛盾.

这个例子是由杨宗磐[12]作出的.

21. 存在某个非弱紧算子,其平方是紧算子.

例 20 中的空间与算子具有所需的性质.

22．存在某个非弱紧算子 S 适合$0\leqslant S\leqslant T$，其中 T 为弱紧算子．

设$\{r_n\}$是区间$[0,1]$上的 Rademacher 函数系，即

$$r_n(t)=\operatorname{sgn}\sin 2^n\pi t.$$

考虑由 Banach 空间 $L[0,1]$到 l^∞的算子 S,T：

$$Sx=\left(\int_0^1 x(t)r_1(t)dt,\cdots,\int_0^1 x(t)r_n(t)dt,\cdots\right),$$

$$Tx=\left(\int_0^1 x(t)dt,\int_0^1 x(t)dt,\cdots\right),$$

则因T的值域是空间 l^∞的1维子空间，故它是紧的，从而也是弱紧的，且 $0\leqslant S\leqslant T$．

兹证S不是弱紧的．为此，我们考虑空间l^∞中的点列$u_n=(0,\cdots,0,1,1,\cdots)$，其中前$n$个坐标均为 0，$n=1,2,\cdots$．显然，它没有弱收敛于 0 的子列．我们再考虑空间 $L[0,1]$ 中的点列$\{x_k\}$：

$$x_k=2^k\chi_{[0,2^{-k}]},$$

其中 $\chi_{[0,2^{-k}]}$是区间$[0,2^{-k}]$的特征函数．显然，$\|x_k\|_1=1$，$k=1,2,\cdots$，且经过简单的计算可得

$$Sx_k=\left(1,\cdots,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots\right),$$

其中前 k 个坐标均为 1．易见，$\{Sx_k\}$的任何子列的弱极限只可能是 $e=(1,1,\cdots)$．然而，等式

$$Sx_k-e=-\frac{u_k}{2}$$

说明了$\{Sx_k\}$不能有弱收敛的子列．也就是说，S不是弱紧的．

23．存在某个严格奇异算子，其共轭算子不是严格奇异算子．

设$X=l,Y=l^2$，则存在X到Y上的连续线性算子T．这种算子的存在性是据 Banach-Mazur[88] 定理：任给可分 Banach 空间Y，存在 l 到Y上的连续线性算子．

兹证T是严格奇异算子．假如不然，则X包含一个无穷维闭

子空间N，它线性同胚于Y的某个闭子空间M．由于Y自反，故M自反，从而N也是自反的．然而，我们知道X并不含有无穷维的自反子空间．因此，T是严格奇异算子．

其次，容易看出T是闭算子，且因$R(T)=Y$，故T^*有有界的逆算子(参看[120],p.63)．因此，T^*不是严格奇异算子．

这个例子属于Goldberg和Thorp[122]．

24．存在某个非严格奇异算子，其共轭算子是严格奇异算子．

设$X=l, Y=l^2$，B为X到Y上的连续线性算子，则$T=B^*$为非严格奇异算子(参看例23)．因为$T^*=B^{**}$为X^{**}到自反Banach空间$Y^{**}=l^2$的连续线性算子，且X^{**}等距同构于空间$(l^\infty)^*$，故T^*是严格奇异算子(参看[120],p.89)．

25．存在某个积分算子，它是非紧的严格奇异算子．

对$n=1,2,\cdots$，在$[0,1]\times[0,1]$上定义函数K为：

$$K(s,t)=\begin{cases}0,(s,t)\in\left(\dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right]\times\left(\dfrac{2j}{2^n},\ \dfrac{(2j+1)}{2^n}\right],\\ 2,(s,t)\in\left(\dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right]\times\left(\dfrac{(2j+1)}{2^n},\ \dfrac{(2j+2)}{2^n}\right],\\ 0,\ s=0 \text{ 或 } t=0,\end{cases}$$

其中$j=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$．显然，K在$[0,1]\times[0,1]$上有界可测．定义由Banach空间$L[0,1]$到$L^p[0,1]$($1\leqslant p<+\infty$)的积分算子T为

$$(Tx)(t)=\int_0^1 K(s,t)x(s)ds,$$

则T为弱紧算子(参看[120],p.90)，从而它是严格奇异算子(参看[120],p.89)．

兹证T不是紧算子．为此，在区间$[0,1]$上定义函数列$\{x_n\}$如下：

$$x_n(s)=\begin{cases}2^n, & s\in\left(\dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right], n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则$\|x_n\|_1=1$. 经过简单的计算,可得

$$\|Tx_n-Tx_m\|_p\geq\|Tx_n-Tx_m\|_1=1(m\neq n),$$

因而$\{Tx_n\}$在 $L^p[0,1]$中不存在收敛子列,即T不是紧算子.

26. 存在某个严格奇异算子，其值域不可分.

设 Γ 是不可数的实数集,$l^p(\Gamma)(1<p<+\infty)$是定义在 Γ 上的至多有可数多个非零坐标的函数 x 的全体，使得

$$\|x\|=\left(\sum_{\tau\in\Gamma}|x(\tau)|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

则 $l^p(\Gamma)$为 Banach 空间. Goldberg 和 Thorp[123]指出,由 $l^2(\Gamma)$到 $l^p(\Gamma)(2<p<+\infty)$的有界线性算子都是严格奇异算子，证明细节可参看作者原文. 由此可见，严格奇异算子的值域不必可分.

27. 非弱紧的严格奇异算子.

下面的例子是由Pelczyński[241]作出的.

对 $x=(\xi_1,\xi_2\cdots)\in l$,令

$$Tx=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k,\ \ \sum_{k=2}^{\infty}\xi_k,\cdots\right),$$

则T为由 l 到 c_0内的有界线性算子. 算子T不是弱紧的，这是因为$\{Te_n\}$是弱 Cauchy 点列,它在 c_0中没有弱极限. 但T是严格奇异算子,这是因为 c_0中没有一个无穷维子空间，它线性同胚于 l 的某个子空间.

第十五章　正规算子和亚正规算子

引言

这一章的例子主要涉及某些空间上的正规算子和亚正规算子.给出基本定义如下：

设H是复 Hilbert 空间,T是H到H内的有界线性算子,若T与T^*可换,即$T^*T=TT^*$,则称T为正规算子或正常算子；若T与T^*T可换,即$TT^*T=T^*TT$,则称T为拟正规算子；如果T有正规扩张，则称T为次正规算子；如果对任意$x\in H$，都有$\|T^*x\|\leqslant\|Tx\|$，则称T为亚正规算子；如果T^*T与TT^*可换，即$T^*TTT^*=TT^*T^*T$，则称T为双正规算子.

容易证明,下列蕴涵关系成立：

正算子⇨自伴算子⇨正规算子⇨拟正规算子⇨次正规算子⇨亚正规算子.

后面的例子将表明其逆均不真．但在有限维 Hilbert 空间上，每个次正规算子都是正规的.

关于正规算子和亚正规算子的更多的材料，可参看[126].

1．正规而不自伴的算子.

容易证明,自伴算子必为正规算子,然而正规算子不必是自伴算子．例如,设I为 Hilbert 空间H到H上的恒等算子,则$T=2iI$是正规算子,这是因为$T^*=-2iI$,从而

$$TT^*=T^*T=4I.$$

但$T^*\neq T$,故T不是自伴算子.

2．无界的对称算子.

容易证明,Hilbert 空间H到H内的对称算子必然是有界的.然而,假如内积空间U不完备,那么由U到U内的对称算子不必是有界的．例如,在线性空间$U=E^\infty$上定义内积为

$$\langle x, y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n,$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in U$, $y=\{\eta_n\}\in U$. 又在 U 上定义算子 T 如下:

$$Tx=(\xi_1,2\xi_2,\cdots,n\xi_n,\cdots).$$

易见，T 是线性算子. 因为

$$\langle Tx, y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\overline{\eta}_n, \langle x, Ty\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\overline{\eta}_n,$$

故 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$，即 T 是对称算子. 但是，若取

$$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots),$$

则 $\|e_n\|=1$, $\|Te_n\|=n$，故 T 是无界算子.

3. 对称而不自伴的算子.

容易证明，对于有界线性算子 T 而言，T 为自伴算子的充要条件是 T 为对称算子. 对于无界线性算子而言，对称算子甚至对称闭算子也不必是自伴算子. 例如，在 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 中考虑对于所有在 0 与 1 处为零而且导数 $x'(t)$（几乎处处存在）也属于 $L^2[0,1]$ 的绝对连续函数 $x(t)$ 定义的算子

$$Tx(t)=ix'(t).$$

算子 T 显然是线性的，它也是对称的，因为

$$\begin{aligned}\langle Tx,y\rangle-\langle x,Ty\rangle &= i\int_0^1 [x'(t)\overline{y(t)}+x(t)\overline{y'(t)}]dt \\ &= i[x(t)\overline{y(t)}]\Big|_0^1=0.\end{aligned}$$

此外，T 还是闭的. 事实上，假如 $\{x_n(t)\}$ 是属于 $D(T)$ 的函数列，并且在范数收敛意义下

$$x_n(t)\to x(t),\quad ix_n'(t)\to ih(t),$$

则在逐点收敛意义下有

$$ix_n(t)=i\int_0^t x_n'(\xi)d\xi\to i\int_0^t h(\xi)d\xi$$

$(=0$，当 $t=0$ 或 $1)$，

由此推得几乎处处有$x(t)=\int_0^t h(\xi)d\xi$. 因为空间 $L^2[0,1]$ 中范数收敛的极限确定到只差一个测度为零的集合，所以我们可以选取 $x(t)$使这个等式处处成立. 于是 $x(t)$也属于$D(T)$,并且

$$Tx(t)=ih(t).$$

现在来计算 T^*. 为此，需要在 $L^2[0,1]$ 中找出使关系式 $\langle ix',y\rangle=\langle x,y^*\rangle$对于 $D(T)$ 的全部元素x都成立的所有元素对 y,y^*.用 y^{**} 表示 y^* 的一个不定积分，则由分部积分得到

$$i\int_0^1 x'(t)[\overline{y(t)}+\overline{iy^{**}(t)}]dt=0.$$

为了使这个等式成立，显然，其充分条件是函数

$$h(t)=y(t)+iy^{**}(t)$$

几乎处处是常数. 这个条件也是必要的，为了看出这一点，只需选取$x(t)$使几乎处处有

$$x'(t)=h(t)+C,$$

这里，$C=\int_0^1 h(t)dt$. 事实上，这时我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1|h(t)-C|^2dt&=\int_0^1[h(t)-C]\,\overline{h(t)}dt\\&\quad-\bar{C}\int_0^1 h(t)dt-C\\&=\int_0^1 x'(t)\overline{h(t)}dt=0,\end{aligned}$$

因此几乎处处有 $h(t)=C$.

如果需要的话，在一个测度为零的集上修改 $y(t)$的值，就处处有 $y(t)+iy^{**}(t)=C$，因而几乎处处有

$$y'(t)+iy^*(t)=0.$$

所以 T^*的定义域是由所有这样的绝对连续函数 $y(t)$所组成，它的导数属于 $L^2[0,1]$但在端点 0 与1处不再受任何条件的限制，并

且我们有

$$T^* y(t) = i y'(t),$$

所以对称闭算子 T 不等于其共轭算子 T^*，即 T 不是自伴算子.

注 可以证明，处处定义的对称算子必为有界的自伴算子（参看[91]，p.1190）. 上述反例表明当对称算子的定义域不是整个空间时，该对称算子不必为自伴算子.

4. 存在某个自伴算子 T，既不满足 $T \geq 0$，也不满足 $T \leq 0$.

容易证明，正算子必为自伴算子. 然而，自伴算子不必为正算子. 例如，设

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

则

$$Tx = (x_1 + x_2, x_1), Ty = (y_1 + y_2, y_1),$$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle (x_1 + x_2, x_1), (y_1, y_2) \rangle$$

$$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

$$\langle x, Ty \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1 + y_2, y_1) \rangle$$

$$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

所以 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$，即 T 为自伴算子. 但是

$$\langle Tx, x \rangle = \langle (x_1 + x_2, x_1), (x_1, x_2) \rangle$$

$$= x_1^2 + 2x_1 x_2,$$

当取 $x_1 = x_2 = 1$ 时，$\langle Tx, x \rangle = 3 > 0$，而取 $x_1 = 1$，$x_2 = -1$ 时，$\langle Tx, x \rangle = -1 < 0$，故 T 既不满足 $T \geq 0$，也不满足 $T \leq 0$.

5. 值域不闭的自伴算子.

对 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$，令

$$Tx = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, \cdots \right),$$

则 T 是定义在 l^2 上而值域含于 l^2 中的有界线性算子. 又任取 $y = \{\eta_n\} \in l^2$，则有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

故T为对称算子，从而也是自伴算子．但T的值域$R(T)$不是闭集(参看第三章例32)．

6．存在两个自伴算子,其积不是自伴算子．

设

$$S=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 49\end{pmatrix},$$

则对$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in R^2$,有

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle(13x_1+12x_2, 12x_1+13x_2), (y_1, y_2)\rangle\\ &= 13x_1y_1+12x_1y_2+12x_2y_1+13x_2y_2;\\ \langle x, Sy\rangle &= \langle(x_1, x_2), (13y_1+12y_2, 12y_1+13y_2)\rangle\\ &= 13x_1y_1+12x_1y_2+12x_2y_1+13x_2y_2,\end{aligned}$$

故S是由$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$内的自伴算子．同理可证，T也是由$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}^2$内的自伴算子．另一方面，容易验证

$$\langle(ST)x, y\rangle \neq \langle x, (ST)y\rangle,$$

故ST不是自伴算子．

注　容易证明,若S，T都是由Hilbert空间H到H中的自伴算子,则ST为自伴算子的充要条件是S,T可换．因此，此例中的算子S,T是不可换的．

7．不可比较的自伴算子．

设S,T为例6中的自伴算子,则

$$\begin{aligned}\langle(S-T)x, x\rangle &= \langle(12x_2-3x_1, 12x_1-36x_2), (x_1, x_2)\rangle\\ &= -3(x_1^2-8x_1x_2+12x_2^2).\end{aligned}$$

若取$x=(0,1)$，则$\langle(S-T)x, x\rangle=-36<0$；若取$x=(4,1)$,则$\langle(S-T)x, x\rangle=12>0$．因此,自伴算子$S$与$T$不可比较．

8．存在两个正算子S,T,使$S\leqslant T$,但$S^2\leqslant T^2$不成立．

设

$$S = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

则对 $x=(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$，有 $Sx=3(x_1+x_2,x_1+x_2)$，$Tx=4(x_1,3x_2)$，故

$$\langle Sx,x\rangle=3(x_1+x_2)^2\geqslant 0,$$
$$\langle Tx,x\rangle=4(x_1^2+3x_2^2)\geqslant 0,$$

即S，T均为正算子. 又因为

$$\langle (T-S)x,x\rangle=\langle (x_1-3x_2,9x_2-3x_1),(x_1,x_2)\rangle$$
$$=(x_1-3x_2)^2\geqslant 0,$$

故 $S\leqslant T$. 另一方面，我们有

$$S^2x=18(x_1+x_2,x_1+x_2),$$
$$T^2x=16(x_1,9x_2),$$

因此

$$\langle (S^2-T^2)x,x\rangle=2(x_1^2+18x_1x_2-63x_2^2).$$

由此可知，$S^2\leqslant T^2$ 并不成立.

注 可以证明，若 $0\leqslant S\leqslant T$ 且S与T可换，则 $S^2\leqslant T^2$（参看[91]，p.925）.

9. 具有幂等性的非自伴算子.

在空间$\mathbf{R}^2$中考虑由矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, a\neq 0$$

定义的算子 T：$y=Tx$，$y_1=x_1, y_2=ax_1$，其中 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$. 于是

$$z=Ty=T^2x, z_1=y_1=x_1, z_2=ay_1=ax_1,$$

从而 $T^2=T$，即T具有幂等性. 但对任一 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$\langle Tx,y\rangle=x_1y_1+ax_1y_2,$$

$$\langle x, Ty\rangle = x_1y_1 + \alpha x_2y_1,$$

所以$\langle Tx, y\rangle \neq \langle x, Ty\rangle$，即$T$不是自伴算子.

注 容易看出，自伴算子不必具有幂等性. 上述反例指出了具有幂等性的算子也不必是自伴的.

10. 存在某个正算子，其特征值$\lambda_n (n=1,2,\cdots)$适合

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{\rho} = +\infty (\rho < 2).$$

设$\{\varphi_n\}$是可分 Hilbert 空间H中的完全就范直交系，T是由H到H内的有界线性算子，称数$\|T\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2$为$T$的二重范数. 关于二重范数，我们有下列

Schur[277]定理 设T是可分 Hilbert空间H上的具有有限二重范数$\|T\|$的有界线性算子，$\{\lambda_n\}$是T的非零特征值数列，使$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leqslant \|T\|^2 < +\infty.$$

应当注意，Schur 定理的结论$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty$不能加强为

$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{2-\varepsilon} < +\infty (\varepsilon > 0)$，甚至对正算子也是如此. 例如，设$\{\varphi_n\}$是可分 Hilbert空间$H$中的完全就范直交系，令

$$T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, n=1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda_n = (n+1)^{-\frac{1}{2}}(\ln(n+1))^{-1}$，则

$$\|T\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|T\varphi_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}<+\infty,$$

且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 都是 T 的非零特征值，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p=+\infty\quad(p<2).$$

兹证 T 是正算子．为此，任取 $x\in H$，则

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n,$$

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle T\varphi_n,$$

故

$$\langle Tx,x\rangle=\left\langle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n\right\rangle$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|\langle x,\varphi_n\rangle|^2\geqslant 0,$$

即 T 是正算子．

11．没有特征值的有界自伴算子．

对 $x\in L^2[0,1]$，令 $Tx(t)=tx(t)$，则 T 为 $L^2[0,1]$ 到 $L^2[0,1]$ 内的有界线性算子．又 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$，故 T 是自伴算子．因为

$$R_\lambda(T)x(t)=(t-\lambda)^{-1}x(t),$$

所以 $\sigma(T)=[0,1]$．对于 $\lambda\in[0,1]$，由等式 $(t-\lambda)x(t)=0$ 得到当 $t\neq\lambda$ 时，$x(t)=0$，从而 $x=0$．因此，λ 不是 T 的特征值．由于 $\lambda\in[0,1]$ 是任取的，故 T 没有特征值．

12．存在某个等距算子，它不是酉算子．

设T是l^2上的右移算子,即对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,令

$$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots).$$

显然,T是由l^2到其值域$R(T)\subset l^2$上的线性而且等距的算子.又易见,$l^2\setminus R(T)\neq\varnothing$,所以$T$不是酉算子.

注 若T为Hilbert空间H到其值域$R(T)\subset H$上的等距线性算子,且$R(T)$在H中稠密,则T必为酉算子(参看[333],p.209).上述反例说明了当T的值域$R(T)$在H中不稠密时,T不必为酉算子.

13. 存在某个正规算子,它不是酉算子.

由酉算子的定义可知:酉算子必为正规算子.但正规算子不必是酉算子.例如,设I是Hilbert空间H到H上的恒等算子,则$T=2iI$是正规算子.但因$T^*=-2iI$,$T^{-1}=-\frac{1}{2}iI$,所以$T^*\neq T^{-1}$,即T不是酉算子.

14. 存在某个酉算子列的强极限,它不是酉算子.

可以证明,Hilbert空间上的可换正规算子列的强极限也是正规算子.应当注意,在这个命题中算子可换的条件不可去掉,去掉以后,酉算子列的强极限甚至不必是正规算子.Cain[62]有例如下:

设$T_n(n=1,2,\cdots)$为由l^2到l^2上的算子,其定义为

$$T_n(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_n,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots).$$

因为$\langle T_nx,T_ny\rangle=\langle x,y\rangle$,且$R(T_n)=l^2$,所以每个$T_n$都是酉算子,从而也都是正规算子.令

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则

$$\|(T_n-T)x\|=\left(|\xi_n|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k-\xi_{k-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

故 T 是算子列$\{T_n\}$的强极限．然而，T 显然不是酉算子．其实，因为

$$T^*(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

所以 $TT^*\neq T^*T$，从而 T 还不是正规算子．

15．存在两个正算子，其积不是正规算子．

设

$$S=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 49\end{pmatrix},$$

则 S，T 均为正算子．而

$$ST=\begin{pmatrix}208 & 588\\ 192 & 637\end{pmatrix},\ (ST)^*=\begin{pmatrix}208 & 192\\ 588 & 637\end{pmatrix},$$

故$(ST)^*(ST)\neq(ST)(ST)^*$，即 ST 不是正规算子．同理可证，TS 也不是正规算子．

注 可以证明，两个可换的正规算子之积仍是正规算子．上述反例表明了在这个命题中，算子可换的条件不能去掉．去掉之后，甚至当 $\dim H=2$ 时，就存在两个正算子 S,T，其积 ST 与 TS 均不是正规算子．

16．存在两个正规算子 S,T，使 ST 是正规算子而 TS 不是正规算子．

Wiegmann[323] 指出，若 S,T 是有限维 Hilbert 空间上的正规算子，且 ST 是正规算子，则 TS 也是正规算子．人们自然要问：对于无穷维 Hilbert 空间，这个命题是否成立？Kaplansky[168] 于 1953 年指出，此时命题不再成立．关于反例的构造可参看作者原文．

17．存在算子 A,B,C，使 $AB-BA=C$ 且 $BC=CB$，但 $C\neq 0$．

设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $AB-BA=C$ 且 $BC=CB$. 然而 $C\neq 0$.

Putnam[251]指出，若算子 A,B,C 适合条件 $AB-BA=C,BC=CB$,且 B 是正规的，则必有 $C=0$. 上述反例表明在这个命题中，B 是正规的条件不可去掉.

18. 存在某个非正规算子 T,而有 $\|T^n\|=\|T\|^n$.

容易证明,若 T 是正规算子,则对任何正整数 n，都有 $\|T^n\|=\|T\|^n$. 然而逆命题并不成立. 例如,设

$$T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\text{则 } T^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

且 $TT^*\neq T^*T$,故 T 不是正规算子. 兹证 $\|T^n\|=\|T\|^n$. 事实上，设 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，有 $\|T^k\|=\|T\|^k$,则

$$\begin{aligned}\|T^nx\|^2&=\langle T^nx,T^nx\rangle=\langle T^*T^nx,T^{n-1}x\rangle\\&\leqslant\|T^*T^nx\|\|T^{n-1}x\|\leqslant\|T^{n+1}x\|\|T^{n-1}x\|\\&\leqslant\|T^{n+1}\|\|T^{n-1}\|\|x\|^2,\end{aligned}$$

所以 $\|T^n\|^2\leqslant\|T^{n+1}\|\|T^{n-1}\|$. 据假设，当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时 $\|T^k\|=\|T\|^k$，故得 $\|T\|^{2n}\leqslant\|T^{n+1}\|\|T\|^{n-1}$，从而 $\|T\|^{n+1}\leqslant\|T^{n+1}\|$. 另一方面，$\|T^{n+1}\|\leqslant\|T\|^{n+1}$,故

$$\|T^{n+1}\|=\|T\|^{n+1}.$$

注 可以证明,若 T 是亚正规算子,则对任何正整数 n，均有 $\|T^n\|=\|T\|^n$. 因此,任何一个亚正规而非正规的算子都具有例 18 所需的性质.

Crabb[74]构造了一个四维赋范线性空间上的正规算子 T，使 $\|T\|\neq r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Emeric[98]指出，若 T 是有限维赋范线性空间上的正规算子,且 T 最多只有 3 个特征值,则 $\|T\|=r(T)$.

19. 任给有界复数列 $\{\mu^k\}$，可构造一个且只有一个以 μ_k 为特征值的正规算子 T,且 $\|T\|=\sup\limits_{k\geqslant 1}|\mu_k|$.

设$\{\varphi_n\}$是可分 Hilbert 空间H中的完全就范直交系，于是对$x\in H$有$x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k$. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k\mu_k|^2\leqslant M^2\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2=M^2\|x\|^2,$$

其中$M=\sup_{k\geqslant 1}|\mu_k|$,故可定义$H$上的算子

$$Tx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mu_k\varphi_k.$$

T显然是线性的，且$\|Tx\|^2\leqslant M^2\|x\|^2$，故$T$有界且$\|T\|\leqslant M$. 显然，$T\varphi_k=\mu_k\varphi_k$，故$\mu_k$是$T$的特征值. 由于$\|\varphi_k\|=1$，故

$$\|T\|\geqslant\|T\varphi_k\|=\|\mu_k\varphi_k\|=|\mu_k|,k=1,2,\cdots,$$

从而$\|T\|\geqslant M$. 因此，$\|T\|=M$.

设$x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k$，$T^*x=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\varphi_k$，则

$$\begin{aligned}\nu_k&=\langle T^*x,\varphi_k\rangle=\langle x,T\varphi_k\rangle=\langle x,\mu_k\varphi_k\rangle\\&=\bar{\mu}_k\langle x,\varphi_k\rangle=\bar{\mu}_k\lambda_k,\end{aligned}$$

从而$T^*T\varphi_k=|\mu_k|^2\varphi_k=TT^*\varphi_k$. 由此可知，$T^*T=TT^*$，即$T$是正规算子.

算子T是唯一的，因为假如S是另一算子，使$S\varphi_k=\mu_k\varphi_k$，$k=1,2,\cdots$，则$S\varphi_k=T\varphi_k,k=1,2,\cdots$，因而$S=T$.

20. 存在某个强收敛于T的正规算子列$\{T_n\}$，使$\sigma(T)\neq\lim_{n\to\infty}\sigma(T_n)$.

可以证明，若T_n,T都是复 Hilbert 空间上的有界正规算子，且$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=\lim_{n\to\infty}\sigma(T_n)\\&=\{z\in C:\text{存在}C\text{中的数列}\{z_n\},\text{使}z_n\in\sigma(T_n),z_n\to z\},\end{aligned}$$

其中C是复数全体. 也就是说，定义在正规算子集上的集函数

$T\to\sigma(T)$关于算子的一致拓扑是连续的(参看[318], pp.217—218). 于是便产生问题：可否把$\{T_n\}$一致收敛于T的条件改弱为$\{T_n\}$强收敛于T？这个问题的答案是否定的. 例如,对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,令

$$T_n x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots),$$

则$\{T_n\}$强收敛于恒等算子I. 但$\sigma(T_n)=\{0,1\}$, $\sigma(I)=\{1\}$, 故$\sigma(I)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(T_n)$.

21. 存在某个正规算子 T 与直交射影算子 P, 使 PTP 不是正规算子.

可以证明,若T是 Hilbert 空间上的有界自伴算子，P是直交射影算子,则 PTP 也是自伴算子(参看[318], p. 128). 对于正规算子而言，相应的命题并不成立. 例如，设H是复三维欧氏空间，又设

$$T=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则T是酉算子,从而也是正规算子. P是H到 span$\{e_2,e_3\}$上的直交射影算子.容易验证,$(PTP)^*(PTP)\neq(PTP)(PTP)^*$, 故$PTP$ 不是正规算子.

22. 存在某个 Hilbert 空间上的正规算子 T 和闭子空间 M, 使 M 是 T 的不变子空间, 而 $M^\perp$ 不是 T 的不变子空间.

可以证明,若T 是 Hilbert空间 H 上的自伴算子，M是T的不变子空间,即$T(M)\subset M$, 则M的直交补 $M^\perp$ 也是T的不变子空间 (参看[333],pp. 217—218). 应当注意,对于正规算子甚至对于酉算子而言,这个命题并不成立.例如,设H是可数维 Hilbert空间,$(\cdots,\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$是$H$中的完全规范直交系，酉算子$T$定义为

$$T\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\varphi_i\right)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\varphi_{i+1},$$

M是由$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots$确定的$H$的闭线性子空间. 显然，$M$是$T$的不变子空间. 然而，$M^\perp$不是$T$的不变子空间，这是因为对$\varphi_{-1}\in M^\perp$而言，$T\varphi_{-1}=\varphi_0\notin M^\perp$.

注　Von Neumann 证明了在无穷维 Hilbert 空间上每个紧算子有非平凡的不变子空间. 之后，Aronszajn 和 Smith[32] 对一般的复 Banach 空间上的紧算子证明了非平凡的不变闭子空间的存在性.

1974 年，Помоносов(参看[252])证明了下述命题. 设X是复 Banach 空间，$T\in L(X)$，$T\neq \alpha I$（α是常数），如果有一个非零的紧算子S与T可换，那么T必有非平凡的超不变闭子空间.

关于不变子空间，下述问题尚未解决：

问题 1　在无穷维复 Banach空间中，是否每个有界线性算子都一定存在非平凡的不变闭子空间.

问题 2　在无穷维复 Banach 空间中是否每个有界线性算子都有非平凡的超不变闭子空间.

由于超不变闭子空间必是不变的，所以如果问题 2 的回答是肯定的，那么问题 1 的回答也是肯定的. 如果问题 1 的回答是否定的，那么问题 2 的回答更是否定的.

23. 拟正规而非正规的算子.

如果T为正规算子，即$T^*T=TT^*$，那么$TT^*T=T^*TT$，即T与T^*T可换，从而T是拟正规算子. 但是，拟正规算子不必是正规的. 例如，对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则T为一等距算子，但它不是酉算子(参看例 12). 由于T等距，故$T^*T=I$，从而T与T^*T可换，即T是拟正规算子. 另一方面，

$T^*x=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$，$TT^*x=(0,\xi_2,\xi_3,\cdots)$，而$T^*Tx=x$，因

此 $TT^*\neq T^*T$，即 T 不是正规算子.

24. 次正规而非拟正规的算子.

可以证明，拟正规算子必为次正规算子(参看[126]，p. 80). 又，有限维 Hilbert 空间上的次正规算子必是正规的，从而也是拟正规的. 但是，无穷维 Hilbert 空间上的次正规算子不必是拟正规的. 例如，设 T 是 l^2 上的单侧右移算子，即对 $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，令

$$T(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\ \xi_0,\ \xi_1,\ \cdots)$$

又设 K 是一切使 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|\xi_i|^2<\infty$ 的数列 $(\cdots,\ \xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 所成的Hilbert 空间，W 是 K 上的双侧移位算子：

$$\begin{aligned}&W(\cdots,\xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)\\&\quad=(\cdots,\xi_{-3},\xi_{-2},(\xi_{-1}),\xi_0,\xi_1,\cdots).\end{aligned}$$

显然，W 是有界线性算子，且

$$\begin{aligned}&W^*(\cdots,\xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)\\&\quad=(\cdots,\xi_{-1},\xi_0,(\xi_1),\xi_2,\xi_3,\cdots).\end{aligned}$$

所以 $WW^*x=(\cdots,\xi_{-2},\xi_{-1},(\xi_0),\xi_1,\xi_2,\cdots)=x$，

即 $WW^*=I$. 因此，W 是正规算子，且 W 是 T 的正规扩张，从而 T 是次正规算子. 然而，T 不是拟正规算子. 事实上，假如 T 是拟正规算子，即 T 与 T^*T 可换：

$$TT^*T=T^*TT,$$

则 $TT^*=T^*T$，从而 T 是正规算子，这显然是荒谬的.

注 Lubin[218] 构造了两个可换的次正规算子 R 和 S，使 $R+S$ 与 RS 均非次正规算子，甚至还均非亚正规算子.

25. 亚正规而非次正规的算子.

可以证明，每个次正规算子都是亚正规的. 又，有限维 Hilbert 空间上的亚正规算子必是正规的，从而也是次正规的(参看[126]，p. 83). 但是，无穷维 Hilbert空间上的亚正规算子不必是次正规

的. 下面的例子属于 Stampfli[300].

设 A 是 Hilbert 空间 H 上的次正规算子，并设 Hilbert 空间 K 上的算子 B 是 A 的正规扩张，而 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in H$，则

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} (B^*)^i x_i \right\| \geqslant 0.$$

利用 B 的正规性，我们可以把它改写成下列形式：

$$0 \leqslant \left\langle \sum_{j=0}^{n} (B^*)^j x_j, \sum_{i=0}^{n} (B^*)^i x_i \right\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle (B^*)^j x_j, (B^*)^i x_i \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle B^i (B^*)^j x_j, \ x_i \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle (B^*)^j B^i x_j, x_i \rangle \text{（因 } B \text{ 是正规的）}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle B^i x_j, B^j x_i \rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle A^i x_j, A^j x_i \rangle.$$

我们把每个 x_j 都乘以某个复数 ξ_j，并在上面的不等式中用 $\xi_j x_j$ 代替 x_j，就得到

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \langle A^i x_j, A^j x_i \rangle \xi_j \overline{\xi}_i \geqslant 0,$$

也就是说，有限矩阵 $(\langle A^i x_j, A^j x_i \rangle)$ 是正定的. 这是 Hilbert 空间上有界线性算子为次正规算子的一个必要条件. 现在我们着手构造一个亚正规算子，它不满足这个必要条件，从而它不是次正规算子.

设 S 是带权数序列 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ 的加权右移算子，$(\varphi_0, \varphi_1,$

$\varphi_2,\cdots$)是 l^2 中的就范完全直交系. 于是,S^*S 和 SS^* 都是对角算子. 其中 S^*S 的对角线是$(|\alpha_0|^2,|\alpha_1|^2,|\alpha_2|^2,\cdots)$, 而 SS^* 的对角线是$(0,|\alpha_0|^2,|\alpha_1|^2,|\alpha_2|^2,\cdots)$. 由此可知,$S$ 是亚正规的(即$SS^*\leqslant S^*S$)当且仅当数列$\{|\alpha_n|\}$递增. 现取S为带权数序列$(\alpha,\beta,1,1,\cdots)$的加权右移算子,其中$0<\alpha<\beta<1$.据上所述,$S$ 是亚正规算子.然而,我们取 i, j 为 0,1,2, 则矩阵$(\langle S^i\varphi_j, S^j\varphi_i\rangle)$是

$$\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha\beta\\ \alpha & \beta^2 & \beta\\ \alpha\beta & \beta & 1\end{pmatrix},$$

它所对应的行列式的值是$-\alpha^2(1-\beta^2)^2<0$,所以它不是正定的,从而S不是次正规算子.

28. 存在两个相似的次正规算子,它们并不酉等价.

可以证明,两个相似的正规算子必定是酉等价的(参看[126], p. 78). 然而,两个相似的次正规算子,它们不必是酉等价的. 下面的例子是由 Sarason 作出的.

考虑复平面上由单位圆周$C=\{z:|z|=1\}$及其圆心组成的测度空间. μ是C上的规范化的(L)测度,也就是说,$\mu(C)=1$(代替$\mu(C)=2\pi$),而在圆心的测度规定为 1. 在 $L^2(\mu)$ 上如下定义算子B:

$$(Bf)(z)=zf(z).$$

A是B在 $L^2(\mu)$中的多项式全体的闭包 $H^2(\mu)$上的限制. 显然,$BB^*=B^*B$,即B是正规算子. 又B是A的正规扩张,故A是次正规算子. 又函数系 $e_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$e_n(z)=z^n(n=1,2,\cdots)$显然是$H^2(\mu)$中的就范完全直交系. 据算子$A$的定义,有

$$Ae_0=\frac{e_1}{\sqrt{2}},Ae_n=e_{n+1},n=1,2,\cdots,$$

换句话说，A是带权数序列$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1,1,\cdots\right)$的加权移位算子.又设$U$是不带权数的移位算子,则$U$也是次正规算子.兹证$A$与$U$是相似的.事实上,设$S$是具有对角线$(1,\sqrt{2},\sqrt{2},\cdots)$的对角算子,即

$$Se_0=e_0,\ Se_n=\sqrt{2}\,e_n,\ n=1,2,\cdots,$$

则$SA=US$,即$A=S^{-1}US$,故A与U是相似的. 然而A与U并不酉等价,这是因为U是等距的,而A则否.

27. 存在某个亚正规算子,其平方不是亚正规算子.

容易证明，正规算子的正整次幂仍是正规算子. 由此不难推知，次正规算子的正整次幂仍是次正规算子. 对于亚正规算子而言，这一命题并不成立.例如,设V为Hilbert空间,H是可数个V的直接和(指标集是整数全体).详言之,H就是使得$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f_n\|^2<\infty$的$V$中的向量$f_i$的序列

$$f=(\cdots,f_{-2},f_{-1},(f_0),f_1,f_2,\cdots)$$

的全体的集. f与g的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f_n,\ g_n\rangle.$$

如果$\{S_n: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是$V$上的正算子列，使得范数列$\{\|S_n\|\}$有界,那么方程$(Sf)_n=S_nf_n$定义了$H$上的一个算子$S$. 如果$W$是由$(Wf)_n=f_{n-1}$定义的移位，则$W$也是$H$上的一个算子.因为$S_n$是正算子,故$(S^*f)_n=S_n^*f_n=S_nf_n$. 又,$(W^*f)_n=f_{n+1}$($W$因此存在逆算子,且事实上是酉算子).

令$A=WS$，则$(Af)_n=S_{n-1}f_{n-1}$. 由于$A^*=SW^*$，可见$(A^*f)_n=S_nf_{n+1}$. 由这些等式得到

$$(A^*Af)_n=S_n^2f_n,\ (AA^*f)_n=S_{n-1}^2f_n.$$

从而A是亚正规的当且仅当算子列$\{S_n^2\}$是递增的. 另一方面，我

们有$(A^2f)_n=S_{n-1}S_{n-2}f_{n-2}$，且$((A^*)^2f)_n=S_nS_{n-1}f_{n+2}$，故得到

$$((A^*)^2A^2f)_n=S_nS_{n-1}^2S_nf_n,$$

$$(A^2(A^*)^2f)_n=S_{n-1}S_{n-2}^*S_{n-1}f_n.$$

因此，A^2是亚正规的当且仅当对一切n，均有

$$S_{n-1}S_{n-2}^2S_{n-1}\leqslant S_nS_{n+1}^2S_n.$$

现在我们要这样地选择V和诸S_n，使得A是亚正规的而A^2则不是．为此，设V为一个二维 Hilbert 空间．于是，V上的线性算子可以与二阶矩阵等同起来．若

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$D-C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\geqslant 0,$$

但

$$D^2-C^2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

它对应的行列式的值是负的．现设当$n\leqslant 0$时，S_n是C的正平方根（它等于C），而当$n>0$时，S_n是D的正平方根，则对一切n有$S_n^2\leqslant S_{n+1}^2$，因此，A是亚正规的．但是，如果$n=1$，则$S_{n-1}S_{n-2}^2S_{n-1}=C^2$而$S_nS_{n+1}^2S_n=D^2$，因此，$A^2$不是亚正规的．

23．存在两个双正规算子，其和不是双正规算子．

容易证明，若T是双正规算子，则

(i) 对任意复数α，αT是双正规算子．

(ii) T^*是双正规算子．

(iii) 若T^{-1}存在，则T^{-1}也是双正规算子

然而两个双正规算子之和不必是双正规算子．例如，令

$$T_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},T_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 T_1,T_2均为双正规算子. 因为

$$T=T_1+T_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$T^*=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, T^*T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, TT^*=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$(TT^*)(T^*T)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ (T^*T)(TT^*)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

因此,$(TT^*)(T^*T)\neq(T^*T)(TT^*)$,即 T 不是双正规算子.

29. 存在某个双正规算子，其平方不是双正规算子.

设

$$T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

不难验证,T 是双正规算子而 T^2 不是双正规算子.

注 Campbell[63]构造了一个双正规且是亚正规的算子 T,使 T^2不是双正规算子.

名 词 索 引

七划

八划

线性闭包
线性同胚
线性泛函
线性算子
线性算子空间
线性维数
范数
范数收敛
单位向量基
单调基
张成的子空间
直交
直交补
直交射影
直交维数
直径
非扩张映射
非常光滑
非常圆形
性质H
孤立点
典则映射
图象

九划

度量空间
度量线性空间
度量有界
度量逼近性质
相对可逆算子
相对谱
相似算子
绝对收敛
绝对收敛基

十划

射影算子
离散拓扑
离散度量空间
通常距离
弱一致凸
弱无条件收敛级数
弱可分
弱可导
弱可测
弱收敛
弱压缩映射
弱序列可分
弱序列完备
弱完备
弱连续
弱有界变差
弱局部一致凸
弱极限
弱拓扑
弱紧生成空间
弱紧集方向一致凸
弱紧算子
弱基
弱*可分
弱*可测
弱*收敛
弱*序列可分
弱*序列完备

弱*完备

弱*极限

弱*拓扑

弱*基

弱*紧集

紧算子

特征元

特征向量

特征值

核

十一划

球面

基

基本弱邻域

基本弱*邻域

基序列

基常数

第一可数公理

第一纲集

第二纲集

距离

距离空间

渐缩集列

十二划

强可导

强可测

强收敛

强有界变差

强连续

强拓扑

超不变子空间

超平面

超自反

剩余谱

赋范直交系

赋范代数

赋范线性空间

等价范数

等价的基

等距

等距映射

等距同构

疏集

逼近性质

最佳逼近

幂零算子

循环向量

十三划

零空间

零维线性空间

稠密集

稠定算子

数值半径

数值值域

十四划

算子一致拓扑

算子弱邻域

算子弱拓扑

算子强邻域

算子强拓扑

算子列的一致收敛

算子列的弱收敛

十五划以上

参 考 文 献

[1] 马绍芹，在巴拿赫空间中取值的绝对连续函数．数学学报 13(1963)，574—583．

[2] 付癸义，Banach 空间凸性在商空间上的遗传性．江西大学学报(1983)，59—62．

[3] 许汪涛，到每个二维子空间均无范数为 1 的投影的三维 Banach 空间．数学研究与评论 4(1984)，97—98．

[4] 吴从炘，序列空间上的囿变函数 (II)．数学学报13(1963)，548—557．

[5] 吴智泉、范俊清，关于$B(\mathfrak{B})$空间，吉林大学学报 4(1963)，17—26．

[6] 汪林，实分析中的反例．高等教育出版社，1989．

[7] 李容录，(OP)型空间的一个特征．科学通报 29(1984)．

[8] 定光桂，关于不完备空间的"共鸣定理"．数学学报 13(1963)，216—222．

[9] ——，关于一类算子族的"共鸣定理"（简报）．数学学报 20(1977)，153—156．

[10] ——，关于凸泛函族的"共鸣定理"．数学学报 24(1981)，851—856．

[11] ——，Banach 空间引论．科学出版社，1984．

[12] 杨宗磐，关于 Riesz 算子．数学进展 8(1965)，83—89．

[13] 罗跃虎，线性拓扑空间中两类算子族的共鸣定理．山西大学学报(1983)，1—7．

[14] 郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要．高等教育出版社，1980．

[15] 南朝勋，巴拿赫空间几何理论．安徽师范大学学报，1982．

[16] 俞鑫泰，Banach 空间几何理论．华东师范大学出版社，1982．

[17] ——，张文耀，关于 Banach-Saks 性质．数学学报 30(1987)，753—757．

[18] 夏道行、严绍宗等，实变函数与泛函分析概要．上海科技出版社，1963．

[19] ——，泛函分析第二教程．高等教育出版社，1987．

[20] 章照止，关于无条件收敛级数的几点注记．数学进展 4(1958)，560—566．

[21] 张奠，取值于收敛数列空间的囿变函数．云南大学学报(1957)，1—16．

[22] Ackermans, S.T.M., Reversible matrices. Amer Math Monthly.

71(1964), 445—446.

[23] Aharoni, I., Lindenstrauss, J., Uniform equivalence between Banach spaces. Bull Amer Math Soc. 84(1978), 281—283.

[24] Altshuler, Z., Characterization of c_0 and l^p among Banach spaces with a symmetric basis. Israel J. Math. 24(1976), 39—44.

[25] ——, A Banach spaces with a symmetric basis which contains no l^p or c_0, and all its symmetric basic sequences are equivalent. Compositio Math. 35(1977), 189—195.

[26] Anderson, K. W., Midpoint local uniform convexity, and other geometric properties of Banach spaces. Dissertation, University of Illinois, 1960.

[27] Anderson, R.D., Hilbert spaces is homeomorphic to the countable infinite product of lines. Bull. Amer Math. 72(1966), 515—519.

[28] Aoki, T., Locally bounded linear topological spaces. Proc Imp Acad. Tokyv. 18(1942), 588—594.

[29] Araker, J., Isometries in normed spaces, Amer Math Monthly. 78(1971), 655--658.

[30] Альтман, М. Ш., О базисах В пространстве Гильберта, Д.А.Н., С.С.Р., 17(1950), 187—196.

[31] Arens, R., Complete metric space. Amer Math Monthly. 65 (1958), 215.

[32] Aronszajn, N., Smith K, T., Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann of Math. 60(1954), 345—350.

[33] Arterburn, D., Whitley, R., Projections in the space of bounded linear operators. Pacific J. Math. 15(1965), 739—746.

[34] Asplund, E., A non-closed relative spectrum. Arkiv főr Mat. 3(1958), 425—427.

[35] Baernstein, A., On reflexivity and summability. Studia Math. 42(1972), 91—94.

[36] Baker, J.A., Isometries in normed spaces. Amer Math Monthly. 78(1971), 655—658.

[37] Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.

[38] ——, Mazur, S., Zur Theorie der linearen Dimension. Studia Math. 4(1933), 100—112.

[39] Berberian, S., Linear *transformation* in a *Hilbert* space. Amer Math Monthly. 67(1960), 809.

[40] Bessaga, C., *On topological classification of complete linear*

metric spaces. Fund Math. 56(1964/65), 251—288.
[41] ——, Pelczyński, A., Properties of bases in spaces of type B_0. Prace Math. 3(1959), 123—142.
[42] ——, On bases and unconditional convergence of series in Banach space. Studia Math. 17(1958), 151—164.
[43] ——, An extension of the Krein-Milman-Rutman theorem concerning bases to the case of B_0 space. Bull Acad. Sci. Pol. 7(1959), 379—383.
[44] ——, Some remaks on homeomorphism of Banach space. Bull Acad. Sci. Pol. 8(1960), 757—761.
[45] ——, Banach spaces non-isomorphic to their cartesian squares, I. Bull Acad. Sci. Pol. 8(1960), 77—80.
[46] ——, Some remaks on homeomorphisms of F-space. Bull Acad. Sci. Pol. 10(1962), 265—270.
[47] ——, On extreme points in separable conjugate spaces. Israel J. Math. 4(1966), 262—264.
[48] ——, Rolewicz, S., On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces. Bull Acad. Sci. Pol. 9(1961), 677—683.
[49] Bianchini, R.M.T., Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi. Roll Un Math Ital, 5(1972), 103—108.
[50] Bishop, E., Phelps, R.K., A proof that every Banach space is subreflexive. Bull Amer Math. Soc. 67(1961), 97—98.
[51] Bohnenblust, F., Convex regions and projections in Minkowski spaces. Ann Math. 39(1938), 301—308.
[52] ——, Sobczyk, A., Extensions of functionals on complex linear spaces. Bull Amer Math. Soc. 44(1938), 91—93.
[53] Bonsall, F.F., Lectures on some fixed point theorems of functional analysis. Tatn Institute of fundamental Research. Bombay India, 1962.
[54] Bosznay, P., A counterexample to a general stability result in universal spaces. Ann Univ Sci. Budepest Eöt vös sect Math. 22/23(1979/80), 221—223.
[55] Bourgain, J., l^∞/c_0 has no equivalent strictly convex nome. Proc Amer Math. Soc. 78(1980), 225—226.
[56] Boyce, W.M., Commuting function with no common fixed point. Trans Amer Math. Soc.137(1969), 77—92.
[57] Browder, F.E., Nonexpansive nonlinear operators in a banach space. Proc Nat. Acad. Sci(U.S.A.), 54(1965), 1041—1044.

[58] ——, Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.), 53(1965), 1272—1276.
[59] Bryant, V.W., A remark on a fixed-point theorem for iterated mappings. Amer Math Monthly. 75(1968), 399—400.
[60] Bynum, W.L., Drew, J.H., A Weak parallelogram law for lp. Amer Math monthly, 79(1972), 1012—1015.
[61] Byrnes, J.S., A comlete set which is not a basis. Amer Math monthly, 79(1972), 510—512.
[62] Cain, B.E., Limits of operators on H. Amer Math Monthly, 78(1971), 920.
[63] Campbell, S.L., Linear operators for which T^*T and TT^* commute (II). Pacific J. Math. 53(1974), 355—361.
[64] Cater, F. S., Complementary subsets of the irrationals. Amer Math monthly, 88(1981), 447—448.
[65] Chantaria, Z.A., On bases in spaces $C[0, 1]$ and $L[0, 1]$. Bull Acad Sci. Pol. 19(1971), 1013—1021.
[66] Chatterjea, S.K., Fixed-poing theoreme. C.R. Acad Bulgare Sci, 25(1972), 727—730.
[67] Chernoff, P.R., Waterhouse. W,C., Operators on a Hilbert space. Amer Math Monthly, 75(1968), 87.
[68] Chow, T.R., The spectral radius of a direct integral of operators. Proc Amer Math Soc. 26(1970), 593—597.
[69] Ciric, L.B., Generalized contractions and fixed-point theorms. Publ Inst Math(N.S), 12(1971), 19—26.
[70] ——, A generalization of Banach's contraction principle. proc Amer Math Soc. 45(1974), 267—273.
[71] Clarkson, J.A., Uniformly conver spaces. Trans Amer Math Soc. 40(1936), 396—414.
[72] Cohen, P.J., A counterxample to the closed graph theorem for bilinear maps. J Functional Analysis, 16(1974), 235—240.
[73] Crabb, M.J., The power inequality on normed spaces. Proc Edinburgh Math Soc. 17(1970), 237—240.
[74] ——, Some results on the numerical range of an operator. J London Math Soc. 2(1970), 714—745.
[75] Davis, W. J., Dean, D.W., Bor-Luh-Lin,Bibasic sequences and norming basic sequences. Tran Amer Math Soc. 176(1973), 89—102.
[76] Davis, W.J., Singer, I., Boundedly complete M-bases and complemented subspaces in Banach spaces. Tram Amer Math Soc.

175(1973), 187—193.
[77] Day, M.M., The spaces L^p with $0<p<1$. Bull Amer Math Soc. 46(1940), 816—823.
[78] ——, Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull Amer Math Soc. 47(1941), 313—317.
[79] ——, Strict convexity and smoothness. Trans Amer Math Soc. 78(1955), 516—528.
[80] ——, James, R.C., Swaminathan, S., Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction. Canad J Math, 23 (1971), 1051—1059.
[81] Dean, D.W., Schauder decompositions in (m). Proc Amer Math Soc, 18(1967), 619—623.
[82] DeMarr, R., Common fixed points for commuting contraction mappings, Pacific J Math. 13(1963), 1139—1141.
[83] Diestel, J., Geometry of Banach spaces. Selected Topers. Lect Notes in Math. Vol 485, Springer 1975.
[84] ——, Uhl, J.J., The Radon-Nikodym theorem for Banach space valued measures. Rocky Mountain J. 6(1976), 1—46.
[85] ——, Theory of vector measure. Amer Math Soc Math Survegys, 1977.
[86] Diminnie, C.R., Albert, W., Problem 6021. Amer Math Monthly, 82(1975), 307.
[87] Dixmier, J., Sur un théoréme de Banach. Duke Math J. 15 (1948), 1057—1071.
[88] Dowson, H.R., Spectral theory of linear operators. London New York, 1978.
[89] Drewnowski, L., The weak basis theorem fails in nonlocally convex F-spaces. Canad J. Math. 29(1977), 1069—1071.
[90] Dunford, N., Uniformity in linear spaces. Trans Amer Math Soc. 44(1938), 305—356.
[91] ——, Schwartz, J., Linear operators(I). New York:Interscience 1958.
[92] Dunkl, C.F., Williams, K.S., A simple norm inequality. Amer Math Monthly. 71(1964), 53—54.
[93] Dvoretzky, A., Rogers, C.A., Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc Nat Acad. Sci(U.S.A), 36(1950), 192—197.
[94] Eberlein, W.F., Weak compactness in Banach spaces. Proc Nat Acad Sci (U.S.A), 33(1947), 51—53.

[95] Edelstein, M., On fixed and periodic points under contractive mappings. J London Math Soc. 37(1962), 74—79.
[96] Edgar, G.A., A long James space, in measure theory. Oberwolafach, 1979, edited by D. kolzow, Lecture Notes in Mathematics 794, Springer-Verlag, 1980.
[97] Ekeland, I., Lebourg, G., Approximate Subgradients. Generic Fréchet differentiability, in Banach spaces. C.R. Acad Sci. 281 (1975), 219—222.
[98] Emeric, D., On some norm-normal operators in finitedimensional normed. J London Math Soc. 8(1974), 664—666.
[99] Enflo, P., A counter-example to the approximation problem in Banach Spaces. Acta Math. 130(1973), 309—317.
[100] ——, Lindenstrauss, J., Pisier, G., On the "three space problem". Math Scand, 36(1975), 199—210.
[101] Fan, K., Irving, G., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space. Duke Math J. 25(1958), 553—368.
[102] Figiel, T., A example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its cartesian square. Studia Math. 42 (1972), 295—306.
[103] ——, Johnson, W. B., The approximation property does not imply the bounded approximation property. Proc Amer Math Soc. 41(1973), 197—200.
[104] ——, A uniformly convex Banach space which contains no l^p. Composito Math. 29(1974), 179—190.
[105] Foguel, S.R., A counterexample to a problem of Sz-Naegy Proc Amer Math Soc. 15(1964), 788—790.
[106] Fournier, G., On a problem of S. Ulam. Proc Amer Math Soc. 29(1971), 622.
[107] Fox, H.S., Maps of a non-compact metric space. Amer Math Monthly. 72(1965), 1142—1143.
[108] Franchetti, C., Admissibee sets in Banach spaces. Rev Roumanie Math. Pures at Appl, 18(1973), 25—31.
[109] Гельфанд, И. М., Abstrakte Funtionen und lineare Operatoren. Матем сб, 4(1938), 235—286.
[110] Garling, D.J.H., Symmetric bases of locally convex spaces. Studia Math, 30(1968), 163—181.
[111] Gelbaum, B.R., Expansions in Banach spaces. Duke Math J. 17(1950), 187—196.
[112] ——, A nonabsolute basis for Hilbert space. Proc Amer Math

Soc. 2(1951), 720—721.

[113] ——, Notes on Banach spaces and basis. An Acad Brasil ci, 30(1958), 29—36

[114] Giles, J.R., Gregory, D.A., Sime, B., Characterization of normed linear spaces with Mazur's intersection property. Bull Australian Math Soc. 18(1978), 105—123.

[115] Gillespie, T.A., West, T.T., A characterization and two examples of Riesz operators. Glasgow Math J. 9(1968), 106—110.

[116] Goebel, K., An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk. Michigan Math J. 16(1969), 381—383.

[117] Goldberg, S., Linear operators and their conjugates. Pacific J Math. 9(1959), 69—79.

[118] ——, A simple proof of a theorem concerning reflexivity. Amer Math Monthly, 67(1960), 1004.

[119] ——, Closed linear operators and associated continuous operators. Pacific J Math.12(1962), 183—186.

[120] ——, Unbounded linear operators. McGraw-Hil, 1966.

[121] ——, Linear functionals in normed spaces. Amer Math Monthly. 84(1977), 829—830.

[122] ——, Throp, E.O., On some open questions concerning stricty singular operators. Proc Amer Math Soc. 14(1963), 334—336.

[123] Grothendieck, A., Sur les applications faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. Canad J Math. 5(1953), 129—173.

[124] Hahn, H., Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. Jouranl Reine Angew Math. 157(1927), 214—229.

[125] Halmos, P.R., On Foguel's answer to Nagy's question. Proc Amer Math Soc. 15(1964), 791—793.

[126] ——, A Hilbert space problem book. Van Nostrand, 1967.

[127] Hanner, O., On the uniform convexity of L^p and l^p. Ark Mat, 3(1956), 239—244.

[128] Hardy, G.E., Rogers, T.D., A generalization of a fixed point theorem of Reich. Cand Math Bull, 16(1973), 201—206.

[129] Hayden, T.L., The extension of bilinear functionals. Pacific J Math. 22(1967), 99—108.

[130] ——, A conjecture on the extension of bilinear functionals. Amer Math Monthly, 74(1967), 1108—1109.

[131] Heinrich, S., Mankiewicz, P., Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces. Stu-

dia Math. 73(1982), 49—75.

[132] Hennefeld, J., On nonequivalent normalized unconditional bases for Banach spaces. Proc Amer Math Soc. 41(1973), 156—158.

[133] Herbert, A.G., Extensions of linear transformations, Amer Math Monthly, 71(1964), 525—529.

[134] Herman, R., Whitley, R., An example concerning reflexivity. Studia Math. 28(1967), 289—294.

[135] Hermann, H., On uniform continuity and compactness in metric spaces. Amer Math Monthly, 88(1981), 204—205.

[136] Hewitt, E., Rings of real-valued continuous functions (I). Trans Amer Math Soc. 64(1948), 45—99.

[137] Hilbert, D., Grundzüge liner allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Repr, 1912.

[138] Hille, E., Tamarkin, J.D., On the theory of linear integral equations II. Ann of Math, 35(1934), 445—455.

[139] Huff, R., Banach spaces which are nearly uniformly convex. Rocky Mountain J Math. 10(1980), 743—749.

[140] Huneke, J.P., On common fixed points of commuting continuous functions on an interval. Trans Amer Math Soc. 137 (1969), 371—381.

[141] James, D., Topological isomorphism and conjugate spaces. Amer Math Monthly. 74(1967), 1109—1111.

[142] James, L., Nowhere continuous, quasi-continuous functions. Amer Math Monthly. 84(1977), 830.

[143] James, P.H., Subsets of the Cantor set. Amer Math Monthly. 89(1982), 279.

[144] James, R.C., A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proc Nat Acad Sci (U.S.A), 37(1951), 174—177.

[145] ——, Separable conjugate spaces. Pacific J Math. 10(1960), 563—571.

[146] ——, Characterizations of reflexivity. Studia Math. 23(1964), 205—216.

[147] ——, coreflexive and somewhat reflexive Banach spaces. Proc Amer Math Soc. 36(1972), 421—427.

[148] Jamisom, B., Eigenvalues of modulus 1. Proc Amer Math Soc. 16(1965), 375—377.

[149] Jerison, M., The space of bounded maps into a Banach space. Ann of Math. 52(1950), 309—327.

[150] John, K., Zizler, V., Smoothness and its equivalents in weakly compaetly generated Banach space. J Functional Analysis, 15 (1974), 1—11.

[151] Johnson, G.G., Hilbert space problem four. Amer Math Monthly, 78(1971), 525—527.

[152] Johnson, W.B., Lindenstrauss, J., Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces. Israel J Math 17(1974), 219—230.

[153] Johnson, W.B., Rosenthal, H.P., On w*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces. Studia Math. 43(1972), 77—92.

[154] ——, Zippin, M., On bases, finite dimensional decompsitions and weaker structures in Banach spaces. Israel J Math. 9(1971), 488—506.

[155] Кадец, М.И., On homeomorphism of certain Banach. Д.А.Н., С.С.Р., 92(1953), 465—468.

[156] ——, О слабой и сильной сходимостм. Д.А.Н., С.С.Р., 121 (1958), 13—16.

[157] ——, Условия дифференцируемости нормы банахова пространства.УМН, 20(1965), 183—187.

[158] ——, On topological equivalence of separable Banach space. Д.А.Н., С.С.Р.,167(1966), 23—25.

[159] ——, A proof of topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. Funk Anal Appl. 1(1967), 53—62.

[160] ——, Pelczyński, A., Bases lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p. Studia Math. 21(1962), 161—176.

[161] Канторович, Л. В., Sur le prolongement des fonctionelles linéaires. Д.А.Н., С.С.Р., 1(1935), 207—210.

[162] Kakutani, S., 位相数学 1:2(1938), 49—51.

[163] ——, Weak convergence in uniformly convex spaces. Tôhoku Math, 15(1939), 113—173.

[164] ——, Some characterizations of Euclidean space. Jap T Math. 16(1939), 93—97.

[165] ——, Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space. Proc Imp Acad Tokyo, 19(1943), 269—271.

[166] Kalton, N. J., On the weak* basis theorem. Compositio Math. 27 (1973), 213—215.

[167] Kannan, R., Some results on fixed points, II. Amer Mathmonthly, 76(1969), 405—408.

[168] Kaplansky, I., Products of normal operators. Duke Math J. 20 (1953), 257—260.

[169] Karlin, S., Bases in Banach spaces. Duke Math J. 15 (1948), 971—985.

[170] Kato, T., Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. J d'Analyse Math. 6 (1958), 273—322.

[171] Kay, D. C., A'parallelogram Law for certain L^p spaces. Amer Math Monthly, 74 (1967), 140—147.

[172] Kelley, J. L. Banach spaces with the extension property. Trans Amer Math Soc. 72(1952), 323—326.

[173] Kinoshita, S., On some contractible continua without the fixed point property. Fund Math. 40(1953), 96—98.

[174] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distance. Amer Math Monthly. 72 (1965), 1004—1006.

[175] Klee, V. L., Some topological properties of convex sets. Trans Amer Math Soc. 78(1955), 30—45.

[176] —, Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces. Math Ann, 39(1959), 51—63.

[177] Klein, E. M., Generalized bases in cross spaces. Amer Math Monthly. 80(1973), 325—326.

[178] Komatuzaki, H., Sur les projections dans certaines espaces du type (B). Proc Imp Acad Tokyo, 16 (1940), 274—279.

[179] ——, Sur les projections dans certaines espaces du type (B). Proc Imp Acad Tokyo, 17 (1941), 238—240.

[180] Крейн, М. Г., Мильман, Д. П., Рутман, М. А., об обном свойстве базиса В Пространстве Банаха. Зап Харьк, Матем общ, 16 (1940), 106—108.

[181] Krein, M., Milman, D., On extreme points of regular convex sets. Sudia Math, 9(1940), 133—138.

[182] Kripke, B., One more reason why sequences are not enough. Amer Math Monthly. 74 (1967), 563—565.

[183] Kruse. A. H., Badly incomplete normed spaces. Math Z, 83 (1964), 314—320.

[184] Kwapien, S., Pelczyński, A., The main triangle projection in matrix spaces and its application. Studia Math. 34(1970), 43—

68.
[185] Lacey, H. E., Separable quotients of Banach spaces. An Acad Brasil ci, 44(1972), 135—139.
[186] Lagnese, J., Linear dependence in L^p. Amer Math Monthly 84 (1977), 66—67.
[187] Larsen, R., Functional analysis. New York, 1973.
[188] Laugwitz, D., On assigning an arbitrary limit to a linearly independent sequence of vectors. Amer Math Monthly, 71 (1964), 290—291.
[189] Leland, K. O., Meyers, L. F., A peculiar non-isometry of the plane. Amer Math Monthly. 71(1964), 799.
[190] Levine, N., A note on the Lipschitz condition in metric spaces. Proc Amer Math Soc. 13(1962), 314—315.
[191] Lindenstrauss, J., On a problem of Nachbin conorning extension of opertors Israel J Math. 1(1963), 75—84.
[192] ——, On operators which attain their norm $B(X,Y)$. Israel J Math. 1(1963), 139—148.
[193] ——, A remaek concerning projections in summability domaing. Amer Math Monthly. 70(1963), 977—978.
[194] ——, On a certain subspace of l_1. Bull Acad Sci. Pol 12(1964), 539—542.
[195] ——, On projections with norm 1-an example. Proc Amer Math Soc. 15(1964), 403—406.
[196] ——, On complemented subspaces of m. Israel J Math. 5 (1967), 153—156.
[197] ——, On subspaces of Banach spaces without quasicomplements. Israel J Math. 6(1968), 36—38.
[198] ——, On James' paper "Separable conjuate spaces". Israel J Math. 9(1971), 279-284.
[199] ——, Weakly compact sets their topological properties and the Banach spaces they generate. Ann of Math Studies, 69 (1972), 235—273.
[200] ——, Pelczyński, A. Absalutey summing operators in L^p spaces and their applications. Studia Math. 29(1968), 275—326.
[201] ——, Contributions to the classical Banach spaces. J Functional Analysis, 8(1971), 225—249.
[202] Lindenstrauss, J., Stegall, C., Examples of separable spaces which do not contain l_1 and whose duals are nonseparable. Studia Math, 54(1975), 81—105.

[203] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., On the complemented subspaces problem. Israel J Math. 9 (1971), 263—269.
[204] ——, On Orlicz Sequence spaces. Israel J Math. 10 (1971), 379—390.
[205] ——, Classical Banach spaces I. Ergebnisse 92, Springe-Verlag 1977.
[206] Lindenstrauss, J., Zippin, M., Banach spaces with a unique unconditional basis. J Functional Analysis. 3(1969), 115—125.
[207] Lohman, R. H., Stiles, W. J., On separability inlinear topological spaces. Proc Amer Math Soc. 42 (1974), 236—237.
[208] Lorch, E. R., Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, Bull Amer Math Soc. 45 (1939), 564—569.
[209] ——, On a calculus of operators in reflexive vector spaces. Trans Amer Math Soc. 45 (1939), 217—234.
[210] Lossers, O. P., Weak contraction maps. Amer Math Monthly, 87(1980), 487.
[211] Lovagloa, A. R., Locally uniformly convex Banach spaces. Trans Amer Math Soc. 78 (1955), 225—238.
[212] Löwig, H., Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimension Szahl. Acta Sci Math. 7 (1934), 1—33.
[213] Lubin, A., Weighted shifts and products of subnormal operators. Indiana Univ. Math J. 26 (1977), 839—845.
[214] Marsden, J., Non linear homogeneous isometries. Amer Math Monthly, 77(1970), 892—893.
[215] Maurey, B., Rosenthal, H. P., Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequence. Studia Math. 61 (1977),77—98
[216] Mavinkurve, M. D., Convexity of function spaces. Amer Math Monthly, 74(1967), 93—94.
[217] Mazur. S., Ulam, S., Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normes. C. R., Acad Sci Paris. 19(1932), 946—948.
[218] Mcwilliams, R. D., On projections of separable subspaces of (m) onto c. Proc Amer Math Soc. 10(1959), 872—876.
[219] ——, Iterated w*-sequential closure of a Banach space in its second conjugate. Proc Amer Math Soc. 16(1965), 1195—1199.
[220] Menger, K., Untersuchungen über allgemeine Metrik von. Math Ann. 100(1928), 75—163.

[221] Minkowski, H. Gesammete Abhandlungen. Vol I, II. Leipziy,1911.
[222] Murray, F. J., On complementary manifolds and projections in spaces L^p and l^p. Trans Amer Math Soc. 41 (1937), 138—152.
[223] Nachbin, L., A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Trans Amer Math Soc. 68(1950), 28—46.
[224] ——, Some problems in extending and lifting linear transformations. Proc Internat Sympos. Linear spaces. Jerusalem, 1961, 340—350.
[225] Nadler, B. Jr., Sequences of contractions and fixed points. pacific J Math. 27(1968), 579—585.
[226] Nagy, B. sz., Completely continuous with uniformly bounded iterates. Magyar Tud Akad Mat Kutató Int közl. 4 (1959), 89—93.
[227] Naimpally, S. A., Function spaces of invertible spaces. Amer Math Monthly, 73(1966), 513—515.
[228] Namioka, I., Phelps, R. R., Banach spaces which are Asplund spaces. Duke Math J, 42(1975), 737—750.
[229] Nathanson, M. B., Round metric spaces. Amer Math Montyly, 82(1975), 738—741.
[230] Neculce, N., The weakening of Cauchy's convergence criterion. Amer Math Monthly, 68(1961), 880—885.
[231] von, Neumann, J., Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Nachr Ges. Wiss, Göttingen. Math-Phys, kl.(1927), 1—57.
[232] ——, Zur Algebra der Functionalope rationen und Theorie der normalen Operatoren. Math Ann. 102 (1930), 370—427.
[233] ——, Charakterisierung des spektrums eines integral operators. Actualites Sci et Ind 229, Paris, 1935.
[234] Niechajewicz, R., Sets of limit points of compact sequences in metric spaces. Bull Acad Sci Pol, 25(1977), 251—253.
[235] Nishiura, T., Waterman, D., Reflexivity and Summability. Studia Math, 23(1963), 53—57.
[236] Olagunju, A., A note on closed operators. Proc cambridge philos Soc. 57(1961), 426.
[237] Partington, J. R., On the Banach-Saks property. Math Proc Cambridge philos Soc. 82(1977), 369—374.
[238] Peck, N. T., Support pionts in locally convex spaces. Duke Math J. 38(1971), 271—278.

[239] Pelczyński, A., Projections in certaion Banach spaces. Studia Math. 19(1960), 209—228.
[240] ——, On the impossibility of embedding of the space L in certain Banach spaces. Coll Math. 8(1961), 199—203.
[241] ——, On strictly singular and strictly cosingular opertors. Bull Acad Sci Pol. 13(1965).
[242] ——, Some open questions in funotional analysis. A lecture gives to Louisiana State University, 1966.
[243] ——, Singer, I., On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces. Studia Math. 25(1964), 5—25.
[244] ——, Sudakov, V. N., Remark on non-complemented subspaces of the space m(s). Collog Math. 9(1962), 85—88.
[245] Pethe, P. V., Thakare, N. K., Asplund spaces and property (1). Preprint (1978).
[246] Pettis, B. J., A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math J, 5(1939), 249—253.
[247] Phelps, R. R., Weak support points of convex sets in E^* Israel J Math, 2(1964), 177—182.
[248] Phillips, R. S., On linear transformations. Trans Amer Math Soc. 48(1940), 516—541.
[249] Pryce, J. D., Banach spaces with common basis. Amer Math Monthly, 71(1964), 509.
[250] Pujara, L. R., A uniformly convex Banach spaces with a Schauder basis which is subsymmetric but not symmetric. Proc Amer Math Soc. 54(1976), 207—210.
[251] Putnam, C. R., On normal operators in Hilbert space. Amer J Math. 73(1951), 357—362.
[252] Radjavi, H., Rosenthal, P., Invariant subspaces, Berlin-Heidelberg, New York Springer, 1974.
[253] Rainwater, J., Local uniform convexity of Day's norm on c_0 (Γ). Proc Amer Math Soc. 22(1969), 335—339.
[254] Rakotch, E., A note on contractive mappings. Proc Amer Math Soc. 13(1962), 459—465.
[255] Reich, S., Some remarks concerning contraction mappings. Cand Math Bull. 14(1971), 121—124.
[256] ——, Kannan's fixed point theorem. Boll Un Mat Ital, 4(1971), 1—11.
[257] Rellich, F., Spektral theorie in nichtseparablen Raüman. Math Annalen, 110(1934), 342—356.

[258] Restrepo, G., Differentiable norms. Boletin Soc Matematica Mexicona, 10(1965), 47—55.
[259] Retherford, J. R., Some remarks on Schauder bases of subspaces. Rev Roum Math. Pures et Appl. 11(1960), 787—792.
[260] Rhoades, B. E., A comparison of various definitions of contractive mappings. Trans Amer Math Soc. 226(1977), 257—290.
[261] Rickart, C. E., General theory of Banach algebras. Van Nostrand, 1960.
[262] Riesz, F., Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Acta Sci Math. 7(1934), 34—38.
[263] Robert, W. C., Weak* dense subspace of $L^\infty(\mathbf{R})$. Math Ann. 197(1972), 180—181.
[264] Roberts, J. W., A compact convex set with no extreme points. Studia Math, 60(1977), 255—266.
[265] Robertson, A., Robertson, W., On the closed graph theorem. Proc Glasgw Math Assoc, 3(1956), 9—12.
[266] Rolewicz, S., On a certain class of linear matric space. Bull Acad Sci Pol, 5(1957), 471—473.
[267] ——, On orbits of elements. Studia Math. 32(1969), 17—22.
[268] ——, An example of a normed space non-isomorphic to its product by the real line. Studia Math, 40(1971), 71—75.
[269] Rosenthal, H. P., On quasi-complemented subspaces of Banach spaces. Proc Nat Acad Sci (U. S. A), 59(1968), 361—364.
[270] ——, On quasi comple mented subspaces of Banach spaces with a appendix on compactness of opertors form $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$. J Functional Analysis, 4(1969), 174—214.
[271] Rothmann, D. D., A nearly discrete metric. Amer Math Monthly, 84(1974), 1018—1019.
[272] Ryff, J. V., A comparison of weak and strong continuity. Studia Math, 22(1962), 85—89.
[273] Sakai, S., Review of reflexivity and summability. Math Reviews, 27(1964), 27.
[274] Samn, S., Existence of a seminormal basis in $C[0, 1]$. Proc Amer Math Soc. 35(1972), 183—185.
[275] Sanders, B. L., On the existence of Schauder decompositions in Banach spaces. Proc Amer Math Soc. 16(1965), 987—990.
[276] Schachermayer, W., Norm attaining operators on some classical Banach spaces. Pacif J Math. 105 (1983), 427—438.
[277] Schur, I., Über die charakteristische Wurzeln einer liearen

substitution mit einer Anwendung auf die Theore der Integraleichungen. Math Ann. 66(1909), 488—510.
[278] ——, Über potenzreihen, die im Innevn des Einheitskreises beschränkt sind. J reine angew Math. 147(1917), 205—232.
[279] ——, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J reine angew Math, 151(1921), 79—111.
[280] Sehgal, V. M., On fixed and periodic points for a class of mappings. J London Math Soc, 5(1972), 571—576.
[281] Seifert, C. J., The dual of Baernstein's space and the Banach-Saks property. Bull Acad Sci Pol 26(1978), 237—239.
[282] Semadeni, Z., Banach spaces non-isomorphic to their cartesian squares, II. Bull Acad Sci Pol, 8(1960), 81—86.
[283] Shapiro, J. H., On the weak basis theorem in F-Space. Canad J Math, 26(1974), 1294—1300.
[284] Sierpinski, W., Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurable. Fund Math, 30 (1938), 96—99.
[285] Singer, I., On Banach spaces with a symmetric basis. Rev Math, Pure Appl, 6(1961), 159—166.
[286] ——, Weak* bases in conjugate Banach Spaces. Studia Math, 21(1961), 75—81.
[287] ——, Basic sequences and reflexivity of Banach spaces. Studia Math, 21(1962), 351—369.
[288] ——, Weak* bases in conjugate Banach spaces, II. Rev Math Pure Appl, 8(1963), 575—584.
[289] ——, On the basis problem in topological linear spaces. Rev Math Pure Appl, 10(1965), 453—457.
[290] ——, Bases in Banach. Springer-Verlag, 1970.
[291] ——, On the extension of basic sequences to bases. Bull Amer Math Soc. 80(1974), 771—772.
[292] Singh, S. K., On projections in a Hilbert space. J Karnatak Univ Sci. 6(1961), 115—116.
[293] Smith, M. A., Banach spaces that are its uniformly rotund in weakly compact sets of directions. Cand J Math. 29 (1977), 963—970.
[294] ——, Products of Banach spaces that are uniformly rotund in every direction. Pacific J Math. 73(1977), 215—219.
[295] ——, Some axampls concerning rotundity in Banach spaces. Math Ann, 233 (1978), 155—161.
[296] ——, A Banach space that is MLUR but not HR. Math Ann,

256(1981), 277—279.

[297] Sobczyk, A., Projections in Minkowski and Banach spaces. Duke Math J, 8(1941), 78—106.

[298] ——, Projection of the spaces m on its subspace c_0 Bull Amer Math Soc, 47(1941), 938—947.

[299] ——, On the extension of linear transformations. Trans Amer Math Soc. 55(1944), 153—169.

[300] Stampfli, J. G., Hyponormal operators. Pacific J Math, 12 (1962), 1453—1458.

[301] Stegall, C., Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 206(1978), 213—223.

[302] Stiles, W. J., On properties of subspace of l^p, $0<p<1$. Trans Amer Math Soc, 149(1970), 405—415.

[303] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean ring to general topology. Trans Amer Math Soc, 41(1937), 375—481.

[304] Sullivan, F., Geometrical properties determined by the higher duals of a Banach space. Illinois J Math, 21(1977), 315—331.

[305] Tacon, D. G., The conjugute of a smooth Banach space. Bull Australian Math Soc. 2(1970), 415—425.

[306] Tapia, R., Problem 5826. Amer Math Monthly, 78 (1971), 1143—1144.

[307] Taylor, A. E., The extension of linear functionals. Duke Math J, 5(1939), 538—547.

[308] ——, Halberg, C. J. A., General theorems about a linear operator and its conjugate. J Reine Angew Math, 198 (1957), 93—111.

[309] Thakare, N. K., Geometry of Banach space: Rough and very smooth norms, Asplund space and related topice. Modern Analysis and Its Applications. Prentie-Hall of India. New Delhi (1986), 89—114.

[310] Thorp, B. L. D., Converse of Weierstrass' M-test? Amer Math Monthly, 74(1967), 600—601.

[311] Thorp, E. O., The relation between a compact linear opertor and its conjugate. Amer Math Monthly, 66(1959), 764—769.

[312] ——, Projections onto the subspace of compact operators. Pacific J Math, 10(1960), 693—696.

[313] Tokarev, E. V., A certain question of Lindenstrauss and Phelps. Funkcional Anal Appl, 7(1973), 96.

[314] Trojanski, S. L., An example of a Smooth space whose dual

has no strictly convex norm. Studia Math, 35 (1970), 305—309.

[315] ——, On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces. Studia Math, 37(1971), 173—180.

[316] Tsirelson B. S., Not every Banach space contains l^p or c_0. Functional Anal Appl, 8(1974), 138—141.

[317] Ulam, S. A collection of mathematical problems. New York, 1960.

[318] Weidmann, J., Linear opertors in Hilbert spaces.

[319] West, T. T., Riesz operators in Banach spaces. Proc London Math Soc. 16(1966), 131—140.

[320] Whitfield, J. H. M., A non-reflexive smooth space with a smooth dual. Canad Math Bull, 17(1974), 579—580.

[321] Whitly, R., Projectng m onto c_0. Amer Math Monthly, 73 (1960), 285—286.

[322] Whitley, R. J., Strictly singular operators and their conjugates. Trans Amer Math Soc, 13(1964), 252—261.

[323] Wiegmann, N. A., Nornal products of matrices. Duke Math J, 15(1948), 633—638.

[324] Wilansky, A., Problem 5108. Amer Math Monthly, 70 (1963), 572.

[325] ——, Problem 6078. Amer Math Monthly, 83(1976), 205.

[326] ——, Functional analysis. Blaisdell. 1964.

[327] ——, Modern methods in topological vector space. McGRAW-Hill International Book Company, 1978.

[328] William, A. V., Short proof of Sobczyk's theorem. Proc Amer Math Soc, 28(1971), 627—628.

[329] Williams, J. D., Crimmins, T., Problem 5451. Amer Math Monthly, 74(1967), 89.

[330] William, J. D., Singer, I., Boundedly complete M-base and complemented subspaces in Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 175(1973), 187—194.

[331] William J. D., William, J. B., A renorming of nonreflexive Banach space. Proc Amer Math Soc, 37(1973), 486—488.

[332] Wojtaszczyk, P., On separable Banach spaces containing all separable reflexive Banach spaces. Studia Math, 37 (1970), 197—202.

[333] Zaanen, A. C., Linear analysis. North-Holland Publishing

Amsterdom, 1953.

[334] Zamfirescu, T., Fix Point theorems in metric spaces. Arch Math, 23(1972), 292—298.

[335] Zhāng wén yào, Yú xīn tài, On R., On R. Huff conjecture. 华东师范大学学报 35(1984), 950.

[336] Zippin, M., On a certain basis in c_0. Israel J Math, 4 (1966), 199—204.

[337] Zizler, V., On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces. Dissertationes Math, no 87. Warsaw Ent Mat Polsk Akad Nauk, 1971.

[338] Zwier, P. J., Ruckle, W. H., The cancellation law for convex sets. Amer Math Monthly, 80(1977), 561.

8998